

Instruktioner för dig som ska söka till Mattekollo 2017

Matematik är kul men Mattekollo 2017 har tyvärr ett begränsat antal platser. Det blir även ett roligare kollo om de som kommer är lika intresserade av matematik och är ungefär på samma nivå. Vi har därför förberett ett antal uppgifter. För att du ska trivas på lägret är det viktigt att nivån på dina inskickade lösningar motsvarar din egen förmåga. Därför måste du lösa uppgifterna utan hjälp av föräldrar, kompisar, syskon, internet med mera. Om det visar sig att du har fått hjälp med uppgifterna eller samarbetat med någon så får du inte åka på kollo, varken i år eller kommande år.

Till Mattekollo antas de 15 elever i respektive årskurs (åk 6, åk 7, åk 8, åk 9) som får bäst resultat på antagningsprovet eller är direktkvalificerade från årets HMT-final (plats 1-14). Elever som precis har avslutat åk 5 tävlar i åk 6-kategorin.

Lös uppgifterna nedan som hör till din årskurs så gott som du kan och skicka in lösningarna till **matematiksallskapet@gmail.com** senast den **8 maj 2017**. Skriv numret på uppgiften på varje blad där lösningsförslaget finns med. Du behöver inte skriva av själva problemen. Du behöver inte lämna in lösningar på alla uppgifter som hör till din årskurs, det är inte meningen att alla ska lösa allt. Uppgifter som är markerade med årskurser som är lägre än din egen ger dig inte några poäng. Om du har frågor om någon av uppgifterna, så skickar du alla dina frågor också till adressen ovan.

Alla dina lösningar ska skickas in samtidigt och vara bilagor till din e-post, tillåtna format är .txt, .doc, .docx, .pdf, .jpg, .tif, .png (det kan vara inscannade/fotade bilder eller datorskrivna dokument). Lösningarna ska gå att läsa, så var noga med handstil samt kvalitet på scanningen/fotot. Filerna du skickar får inte överstiga 20 Mb i storlek. I ämnesraden (subject) skriver du "Skriftligt prov", samt ditt förnamn och efternamn, t.ex. "Skriftligt prov Anna Svensson" är en godkänd ämnesrad.

Om du kommer på att du vill ändra något så kan du skicka alla lösningar på nytt igen med samma ämnesrad. Vi kommer då bara kolla på det senast inskickade mailet, medan alla tidigare mail ignoreras.

Ju bättre du förklarar dina lösningar, desto större chans har du att komma med på Mattekollo 2017! Skriv ner dina tankar även om du inte har löst hela uppgiften, delpoäng kan vara avgörande.

En lista med personer som är antagna till kollo eller är reserver publiceras på hemsidan senast den 21 maj 2017. Listan kommer innehålla årskurs, förnamn samt efternamnets första bokstav på de antagna elever och reserver. Som reserv får du veta om du kommer in senast den 4 juni 2017, vilket även är det senaste datumet att bestämma dig för om du ska vara med eller inte. Kom ihåg att anmäla dig som sökande på <http://mattekollo.se>! Detta gör du senast den **8 maj 2017**.

Misströsta inte om vi inte har möjlighet att ta in just dig till årets kollo. Försök nästa år igen, och fortsätt att ha kul med matematik! Vi har fler aktiviteter i föreningen Matematiksällskapet under årets gång, som är öppna för alla, så se till att bli medlem.

Lös så många du kan av nedanstående problem och motivera dina svar noggrant om inget annat anges.

Antagningsprov Mattekollo 2017

Året är 2017 och du har byggt en höghastighetsraket som kan ta dig på rymdäventyr! Det är din matematiska förmåga som har gjort detta möjligt, men du behöver möjligen ännu svårare matematik och logiskt tänkande för att klara dig därute bland okända världrar. Med dig får du en lapp från utbildningsministern med lite anteckningar som kan komma till användning:

Matematisk ordlista med förklaringar

- *Naturligt tal* - ett tal i den oändliga listan 0, 1, 2, 3, 4, ...
- *Siffra* - ett naturligt tal från 0 till 9
- *På varandra följande tal* - några (kan vara ett) tal som kommer på rad i listan över naturliga tal med start var som helst i listan. Till exempel är detta en lista på tre på varandra följande tal: 356, 357, 358.
- *Jämnt delbart* - ett tal a är jämnt delbart med ett tal b om resultatet av divisionen $\frac{a}{b}$ är ett naturligt tal.

Första kontakten (åk 6-7)

1. Redan dagen efter att du lämnar Solsystemet fångar du in en signal. Du ser att du är på väg mot ett annat solsystem och meddelandet berättar att det systemet har tre planeter: Alpha, Bacca och Centaura (men du ser inte vilken planet som är vilken). Utomjordingarna som skickar meddelandet berättar också att de bor på den andra planeten från stjärnan. Du skyndar dig till solsystemet men signalen avbryts. Senare får du två meddelanden till, men som forskarna på jorden berättar för dig är lögn-er:

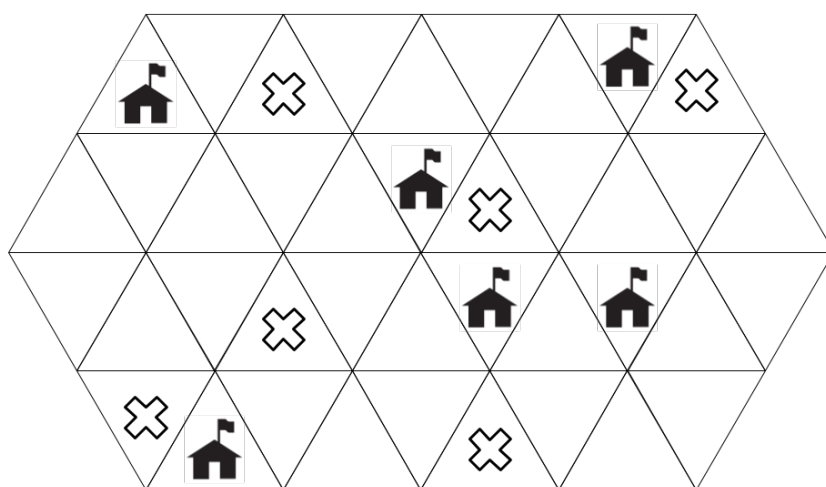
- Alpha är inte den tredje planeten från stjärnan.
- Bacca är den andra planeten från stjärnan.

Vilken av planeterna bor utomjordingarna på?

Konflikten (åk 6-7)

2. Du kommer fram till utomjordingarnas planet och landar i en grop. Du sätter upp forskningsstationer för att ta prover. Du har också markerat på din karta de kratrarna där utomjordingarna bor med kryss. Det visar sig att utomjordingarna fortsätter vara lömska och snor din dyrbara utrustning. Du bestämmer dig för att bygga staket för att förhindra utomjordingarna att komma i kontakt med stationerna. Gropens väggar bildar naturligt skydd. Varje staketdel är 100 m lång, men du vill spara på materialet. (En del går mellan två närmaste hörn på trianglarna på bilden. Hela bilden är gropen.)

Visa på bilden nedan hur du ska sätta upp staketen inuti gropen. Använd så få staketdelar som du bara kan och skriv upp hur mycket staket du använde totalt.



Hälsningen (åk 6-8)

3. Efter att du har gjort din forskning reser du vidare till ännu ett solsystem. Du landar på en planet och välkomnas direkt av några utomjordingar som bär på en plakat med ett hälsning som ser ut så här:



Du får reda på att det är planetens fyra ledare som har skrivit hälsningen tillsammans. Det visar sig att Xylon bara kan skriva symbolerna \odot och \triangle . Yfi kan skriva \diamond och \odot , Zeta kan skriva \diamond och \square och Warwick kan skriva \triangle och \square .

Du fick också reda på att de verkligen ville göra det här till en gemensam skapelse, så ingen utomjording skrev två symboler som kom direkt efter varandra och inte heller var det någon som skrev två symboler nästan direkt efter varandra, det vill säga som har exakt en symbol mellan sig.

Kan du ta reda på vem som skrev vilken eller vilka symboler i hälsningen?

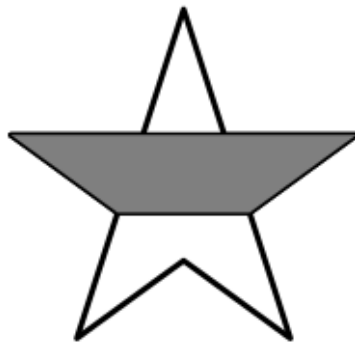
Femtonårsdagen (åk 6-9)

4. Det visade sig att planeten med de vänliga utomjordingarna heter Urpiduns. På planeten Urpiduns är ett år 18 månader långt och varje månad har 10 dagar. Vart sjunde år på planeten är ett skottår som är en dag längre än de vanliga åren. Den extra dagen under skottåren faller alltid på den 11:e dagen den tredje månaden. Varje vecka består av fem dagar: Måndag, Soldag, Jorddag, Urpidunsdag, Hälsningsdag.

Durpiduns, en av invånarna på planeten Urpiduns, föddes på en Urpidunsdag, första dagen på den fjärde månaden under ett skottår. Vilken veckodag kommer han fira sin 15-årsdag?

Tårtan (åk 6-9)

5. Urpidunsinvånarna tycker om dig så mycket att de ordnar en fin avskedsfest med tårta när du säger att du ska åka vidare. Tårtan har din favoritform, det är en regelbunden femuddig stjärna. På en del av stjärnan har Urpidunsarna brett på den berömda antimateria-chokladen (den delen är svart) och resten av tårtan är täckt med stjärnstoffsylt (som är vit). Du vill veta vilken som är störst: delen med choklad eller delen med sylt. Kan du avgöra det?



Intergalaktiska festivalen (åk 6-9)

6. Urpidunsarna tipsar dig om att åka på en stor festival som sker på grannplaneten i systemet, så du tittar in där. På den intergalaktiska festivalen observerar du 107 gäster, som är antingen gröna eller lila varelser. De gröna varelserna uppfattar färgerna på ett korrekt sätt, medan de lila uppfattar färgerna fel: de tycker att grönt ser ut som lila och tvärtom.

När alla hade kommit till festivalen så ser du någonting märkligt: var och en av gästerna går fram till någon annan, säger "Vad lila du är!" och ger bort en kaktus till den varelsen. Du blir lite paff och hinner inte registrera alla mottagarna eftersom allting sker så snabbt. Men du är ändå säker på att åtminstone en varelse blev utan kaktus. Kan du bevisa varför?

Astronomiska tal (åk 6-9)

7. Efter att ha umgåtts mycket med varelserna på festivalen känner du för att ta lite tid för dig själv och forska i matematik. Du hittar på en ny typ av tal: Du kallar ett naturligt tal för *astronomiskt* om det är jämnt delbart med var och en av sina siffror som inte är 0. Till exempel inser du att talet 2016 astronomiskt, eftersom det är delbart med 2, med 1, och med 6. Vilket är det största antalet på varandra följande astronomiska tal?

Apornas planet (åk 7-9)

8. Ute i ingenstans i rymden stöter du på ett skepp. Du bestämmer dig för att umgås med besättningen ett tag och de berättar följande historia för dig: "En gång, när vi var fler, så anlände vi till en planet där det bodde intelligenta apor. Aporna välkomnade oss med mat och dricka men började sedan kräva pengar för besväret. Alla i besättningen bidrog med 15 stjärndollar var, förutom kaptenen som bidrog med 18 stjärndollar. Då visade det sig att pengarna kunde delas lika bland aporna. Nästa dag kom aporna tillbaka till skeppet och ville ha ännu mer pengar. Alla bidrog då med 18 stjärndollar förutom kaptenen som bidrog med 19 stjärndollar. Då kunde pengarna återigen delas lika bland aporna. Vi bestämde oss då för att hastigt åka iväg." Besättningen kommer ihåg att de träffade på åtminstone två apor. Kan du reda ut åt besättningen hur många aporna var?

Transportsystemet (åk 7-9)

9. Du börjar vända hem, men stannar på en industriell planet där du har lite kontakter. Planeten befinner sig i ett koloniserat solsystem som har ett transportsystem. Deras tanke är att oavsett vilken planet man börjar på, så ska man kunna ta sig till vilken annan planet som helst av de andra med hjälp av transportlinjerna (kanske med några byten).

Tyvärr är det inte så just nu. Men en dag efter att du anländer bestämmer sig solsystemets ledare för den radikala förändringen att byta alla rutterna för transportsystemet: Om det tidigare fanns en direkttransport mellan planeterna A och B, så finns det inte längre någon där, och om planeterna C och D inte hade någon direkttransport mellan sig så finns det nu en där. Visa att det nu är möjligt att ta sig från vilken planet som helst till vilken annan planet som helst med hjälp av de nya transportlinjerna.

Stjärnforskning (åk 7-9)

10. Ännu närmare hemmet hälsar du på din vän Astronomen som gör viktig forskning på stjärnor. Du vet att det finns oändligt många stjärnor i universum. Astronomen har tilldelat varje stjärna ett par med naturliga tal, där det första talet står för stjärnans ljusstyrka och det andra talet står för stjärnans storlek. Visa att det finns två stjärnor sådana att en av dem har varken tilldelats större ljusstyrka eller större storlek än den andra av Astronomen.

Kommunikation (åk 8-9)

11. Du har kommit hem till jorden men din resa har inte gått förbi obemärkt av andra varelser i universum. De hälsar på några veckor efter din ankomst och jorden skickar sin främsta matematiker (dig) för att försöka kommunicera med dem. Det visar sig nämligen att varelserna som kommit varken har operationerna $+$, $-$, $/$ eller \cdot . De har bara operationen $*$ och du fattar till slut att $a * b = 1 - \frac{a}{b}$.

Hur kan du förklara våra operationer för varelsen? Skriv var sitt uttryck för $a + b$, $a - b$, $a \cdot b$ samt $\frac{a}{b}$ som bara använder $a:n$, $b:n$, operationen $*$, parenteser, samt naturliga tal (eller åtminstone visa att det går att skriva ner sådana uttryck). Alla fyra uttrycken måste använda ändligt många symboler och uttrycken ska se likadana ut oavsett vad a och b är lika med.

Kryptering (åk 6-9)

För att lösa denna uppgift får du gärna, om du vill, skriva hjälpprogram på datorn. Bifoga då programmet i en textfil eller skriv pseudokod på datorn eller på papper. Skriv också om du använder dig av eventuella hjälpfiler.

12. Några månader efter att du har kommit hem mottar du ett meddelande från Urpidunsarna som har lärt sig svenska bokstäver. Meddelandet lyder "AWKKL IT BJC". Du vet att meddelandet är krypterat med något som kallas ett *substitutionschiffer*. Substitutionschiffer fungerar så att varje bokstav byts ut mot en annan. Till exempel kan A bytas mot X, B bytas mot C, C bytas ut mot Ö och så vidare. Varje bokstav i originaltexten representeras bara av en bokstav i chifftexten, så A kan inte bli X en gång, och sedan D nästa gång, och ett D i chifftexten betyder alltid samma sak i den avkrypterade texten.

Hur många möjliga avkrypteringar finns det av Urpidunsarnas meddelande? Om en dator skulle testa en avkryptering varje sekund, hur lång tid skulle det ta att testa alla? Om du vet att meddelandet är skrivet på svenska, hur kan du begränsa antalet avkrypteringar datorn måste testa? Kan du då lista ut vad meddelandet är?