Antagningsprov Mattekollo 2018 åk 9-gy1

Instruktioner för dig som ska söka till Mattekollo 2018 åk 9-gy 1

Matematik är kul men Mattekollo 2018 har tyvärr ett begränsat antal platser. Det blir även ett roligare kollo om de som kommer är lika intresserade av matematik och är ungefär på samma nivå. Vi har därför förberett ett antal uppgifter. För att du ska trivas på lägret är det viktigt att nivån på dina inskickade lösningar motsvarar din egen förmåga. Därför måste du lösa uppgifterna utan hjälp av föräldrar, kompisar, syskon, internet med mera. Om det visar sig att du har fått hjälp med uppgifterna eller samarbetat med någon så får du inte åka på kollot, varken i år eller kommande år.

Till Mattekollo antas de 15 elever i respektive årskurs (åk 9, gy 1) som får bäst resultat på antagningsprovet eller är direktkvalificerade från årets HMT-final (plats 1-15) eller årets SMT-final (plats 1-20). Elever som ännu inte har börjat åk 9 räknas till åk 9-kategorin.

Lös uppgifterna nedan så gott som du kan och skicka in lösningarna till **matematiksallskapet@gmail.com** senast den **22 april 2018**. Skriv numret på uppgiften på varje blad där lösningsförslaget finns med. Du behöver inte skriva av själva problemen. Du behöver inte lämna in lösningar på alla uppgifter, det är inte meningen att alla ska lösa allt. Om du har frågor om någon av uppgifterna, så skickar du alla dina frågor också till adressen ovan.

Alla dina lösningar ska skickas in samtidigt och vara bilagor till din e-post, tillåtna format är .txt, .doc, .docx, .pdf, .jpg, .tif, .png (det kan vara inscannade/fotade bilder eller datorskrivna dokument). Var noga med att bilderna hamnar åt rätt håll i mailet. Lösningarna ska gå att läsa, var noga med handstil samt kvalitét på scanningen/fotot. Filerna du skickar får inte överstiga 20 Mb i storlek. I ämnesraden (subject) skriver du ”Skriftligt prov”, samt ditt förnamn och efternamn, t.ex. **”Skriftligt prov Anna Svensson”** är en godkänd ämnesrad.

Om du kommer på att du vill ändra något så kan du skicka alla lösningar på nytt igen med samma ämnesrad. Vi kommer då bara kolla på det senast inskickade mailet, medan alla tidigare mail ignoreras.

Ju bättre du förklarar dina lösningar, desto större chans har du att komma med på Mattekollo 2018! Skriv ner dina tankar även om du inte har löst hela uppgiften, delpoäng kan vara avgörande.

Besked om antagning/reservplats skickas av oss senast den **6 maj**. Som reserv får du veta om du kommer in senast den **20 maj**, vilket även är det senaste datumet att bestämma dig för om du ska vara med eller inte. Kom ihåg att anmäla dig som sökande på `http://mattekollo.se`! Detta gör du senast den **22 april**.

Misströsta inte om vi inte har möjlighet att ta in just dig till årets kollo. Försök nästa år igen, och fortsätt att ha kul med matematik! Vi har fler aktiviteter i föreningen Matematiksällskapet under årets gång, som är öppna för alla, så se till att bli medlem.

I ett litet hus precis utanför staden bor den excentriske uppfinnaren Rickard Méndez. Han uppfinner det mesta och till sin hjälp har han sin kompis Martin Smitt. De har alltid massa intressanta idéer och projekt på gång. För tillfället pågår det storstädning i Rickards förråd.

Katastrof-lampor

1. Rickard hittar tolv kubformade lampor i förrådet, som han minns är kvar från deras barndom. Martin har alltid bott i huset mittemot Rickards. De har alltid tänkt på allt, bland annat hur de skulle kommunicera om telefonen inte fungerade och de inte fick lämna huset (Internet fanns inte när de var små).

Rickard ställer nu återgien ut de kubformade lamporna i fönstret i form av en 3x4-rektangel. Han tänker att nu skulle de kunna användas i katastrofsituationer när alla nätverk går ner. De kommer överens om hur Rickard ska tända vissa av lamporna för att Martin ska förstå vad som ska göras. För att det ska gå fort för Martin att förstå signalen tänder Rickard lamporna i form av rektangel. Till exempel så betyder det ”Vi ses i de underjordiska gångarna!” om han endast tänder lampan längst upp till höger i sin konstruktion.

Hur många sådana här rektangel-signaler kan Rickard och Martin ha i sitt kommunikationssystem?

Koden

2. Lite senare under dagen hittar Martin en låda med ett digitalt lås på som kräver ett lösenord. Martin frågar Rickard vad det är i den, men tankspridd som han är har han glömt det. Däremot minns han lösenordet. Det är svaret på frågan ”*Finns det ett heltal* n *sådant att* $\sqrt{n\sqrt{n\sqrt{n}}}$ *är också ett heltal?*”. Svarar man fel förstörs innehållet i lådan. Kan du hjälpa Martin att ta reda på vad lösenordet är?

Den tärningskastande roboten

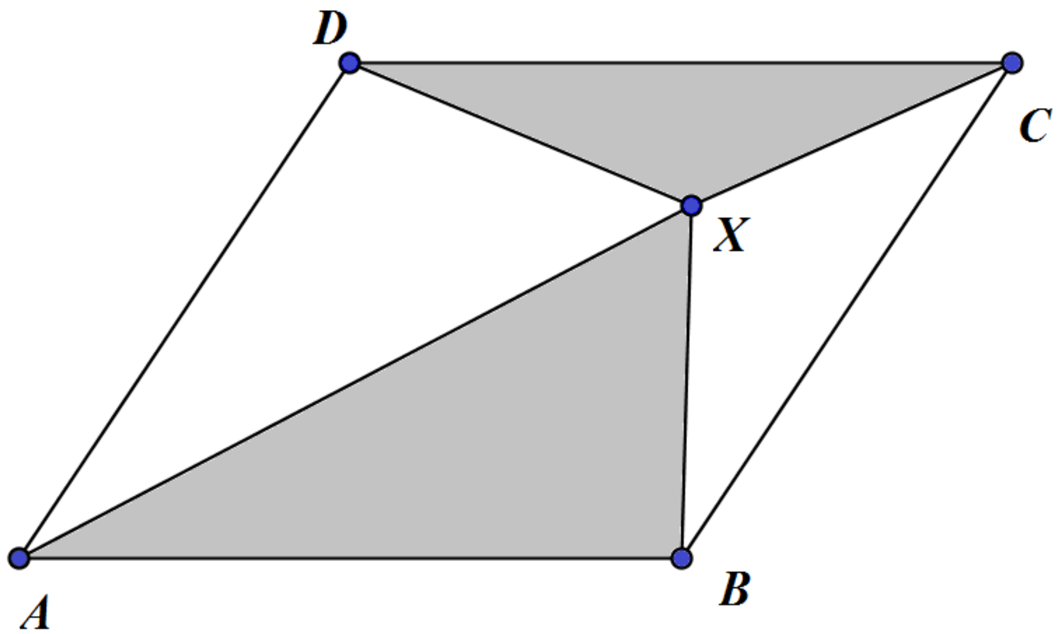
3. Martin lyckas till slut öppna lådan utan att förstöra innehållet. Inuti den finns en robot. Rickard blir överlycklig och berättar entusiastiskt att han byggt roboten själv en gång för länge sedan och att den kan kasta tärningar och tala om vad resultatet är. Martin vill testa den och tar fram tre stycken ganska speciella tärningar.

Tärningarna har fyra sidor var och på varje sida står en bokstav. Rickard blir nyfiken på tärningarna, men Martin säger att om han vill veta vilka bokstäver som står på dem måste han använda sig av informationen han får från roboten. Martin ber roboten att kasta tärningarna några gånger och tala om vad den får för resultat. Roboten kastar dem åtta gånger och får följande resultat: GYM, NOS, TOR, FIL, TAL, MYT, RIS, YTA Rickard blir irriterad över att Martin alltid ska krångla till allt. Kan du hjälpa honom att ta reda på vilka bokstäver som finns på respektive tärning?

Trianglar

4. Det är mycket som ska rensas och efter att ha hållit på en hel förmiddag bestämmer sig Rickard och Martin för att ta en paus och spela lite spel. Deras favoritdatorspel heter Trianglar. Det handlar om att fördela en parallelogram på ett sådant sätt att man får den största arean. Spelet börjar med att en punkt X placeras i mitten av en parallelogram $ABCD$ (se bilden). Rickard, som alltid börjar, får dra punkten X åt vänster eller höger, varpå Martin får dra punkten vidare uppåt eller neråt hur mycket han vill. Enda begränsningen är att punkten inte får lämna parallelogrammens insida. Efter att detta gjorts lägger spelet ihop arean av trianglarna ABX och CDX (alltså arean av de gråa trianglarna i figuren). Om den arean är större än arean av ADX och BCX ihop (dvs arean av de vita trianglarna i samma figur), då vinner Rickard, annars vinner Martin.

Hur kommer spelet att sluta om både Rickard och Martin är supersmarta och spelar optimalt?



Överblivet skrot

5. Efter att ha resnat alla förråden står nu Rickard och Martin med fem lådor elektronikskrot som de ska göra sig av med. De åker till den lokaka återvinningscentralen för elektronik och där de möter sommarjobbaren Juni som har i uppdrag att väga det inkomna. Eftersom hon är matematikintresserad och tycker att det är lite tråkigt att bara stå och väga saker hela dagarna bestämmer hon sig för att ge sig själv en utmaning. Istället för att väga Rickards och Martins lådor en och en, väger hon dem parvis. Efter att ha vägt alla med alla får hon följande resultat: 129 kg, 125 kg, 124 kg, 123 kg, 122 kg, 121 kg, 120 kg, 118 kg, 116 kg and 114 kg. Vad väger lådorna var för sig?

Lösenordet

6. Nu när det är ordning i Rickards förråd har de äntligen tid för annat igen. För att komma ihåg lösenordet till sin dator har Martin följande minnesregel: Det består av alla tal från 1 till och med 15 ordnade på ett sådant sätt att summan av två på varandra följande tal alltid är ett kvadrattal (t.ex. kan talen 14 och 2 stå bredvid varandra eftersom $14 + 2 = 16$, medan 14 och 5 inte kan det eftersom $14 + 5 = 19$).

Ett *kvadrattal* får man genom att multiplicera ett heltal med sig självt. De första kvadrattalen är 1, 4, 9, 16, 25, ...

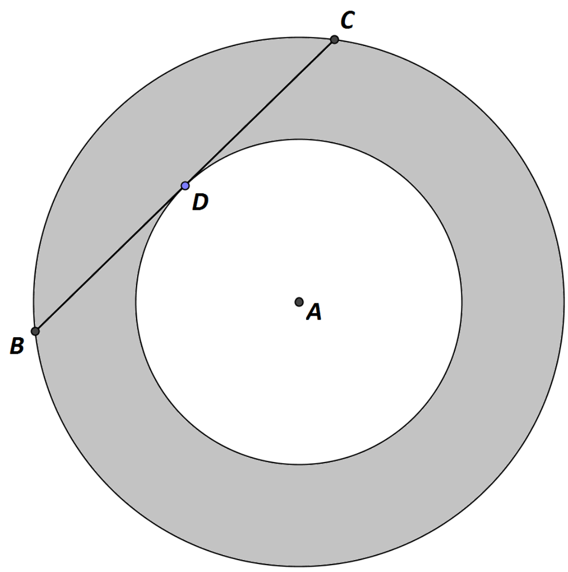
(a) Vad är Martins lösenord?

(b) Eftersom han är lite rädd för att Rickard ska ta sig in i hans dator och stjäla hans idéer bestämmer han sig för att göra lösenordet ännu säkrare. Han tänker att det bästa sättet är att göra det längre och funderar på att använda sig av samma regel men med tal upp till 16, 17 eller 18. Vilket bör han välja?

3D-modellering

7. Under förrådsrensingen hittade de en gammal 3D-skrivare. För att återinviga den tänker Rickard skriva ut donuts. Han börjar med att först rita en 2D-modell: två cirklar med samma mittpunkt (se figuren nedan). För att mäta hur stor den platta donutens area blir, tänker han att han ska mäta cirklarnas areor. I samma stund kommer hans kompis Bettan in i rummet och ger ett tips Rickard inte visste att han ville höra. ”Du behöver inte mäta båda radierna, det räcker att bara mäta en sträcka!”. Sedan ritar hon en tangent till den inre cirkeln (se bilden nedan) inuti den stora cirkeln. Sträckans längd blir 10 cm exakt.

Bettan har rätt i detta räcker för att bestämma donutens area! Vad är arean lika med? (Observera att bilden inte är skalenlig utan bara schematiskt rätt.)



Decimalberäkningar

8. Rickard vet att Bettan tycker att det är kul att skämta med folk, så när hon har gått hem börjar han bli lite orolig för sin dator. Något hon sade har gjort att han är rädd att hon ska ha infekterat den med ett virus som gör att den räknar fel ibland. För att försäkra sig om ifall detta är fallet bestämmer han sig för att låta datorn räkna ut ett antal decimaler i talet $(\sqrt{3}+\sqrt{2})^{2018}$ och sedan jämföra det med det verkliga svaret. Men för att kunna göra detta måste han själv veta vad decimalerna är.

(a) Vilka är de 500 första decimalerna i talet?

(b) Vilka är de 1000 första decimalerna i talet?

Det visar sig att Rickards misstankar angående virus på datorn var välgrundade. Det fanns ett virus! Martin hjälper honom att bli av med det och tillsammans bestämmer de sig för att hämnas på Bettan. Men denna hämnd måste planeras... Och det klarar de inte själva, så de planerar att ta hjälp av av deltagarna på Mattekollo 2018!