Antagningsprov Mattekollo 2021 åk 9-gy2

För att hålla en jämn nivå bland deltagarna på Mattekollo 2021 anordnar vi ett antagningsprov. Lös så många av uppgifterna nedan du kan utan hjälp av vare sig föräldrar, kompisar, syskon, internet, programmering etc. Om det visar sig att du har fått hjälp med uppgifterna eller samarbetat med någon så får du inte åka på kollot.

Till Mattekollo antas cirka 7 elever per årskurs (åk 9, gy1, gy2) som får bäst resultat på antagningsprovet eller är direktkvalificerade från årets HMT-final (plats 1-15) eller SMT-final. Elever som precis har avslutat åk 8 tävlar i åk 9-kategorin.

Skicka in lösningarna till **antagningsprov@mattekollo.se** senast den **6 maj 2021**. Skriv uppgiftsnumret på uppgiften på varje blad. Bara svar ger inga poäng om inget annat anges. Du behöver inte lämna in lösningar på alla uppgifter, det är inte meningen att alla ska lösa allt. Om du har frågor, så skickar du dem till adressen ovan.

Alla dina lösningar ska skickas in samtidigt och vara bilagor till din e-post, tillåtna format är .txt, .doc, .docx, .pdf, .jpg, .tif, .png (det kan vara inscannade/fotade bilder eller datorskrivna dokument). Var noga med att bilderna hamnar åt rätt håll om du tar foton. Lösningarna ska gå att läsa. Filerna du skickar får inte överstiga 30 Mb i storlek. I ämnesraden (subject) skriver du ”Skriftligt prov”, samt ditt förnamn och efternamn, och därefter ”åk 9-gy2” som är kollot du söker till, t.ex.:
”Skriftligt prov Anna Svensson åk 9-gy2”.

Om du kommer på att du vill ändra något så kan du skicka alla lösningar på nytt igen med samma ämnesrad. Vi kommer då bara kolla på det senast inskickade mejlet, då ignoreras alla tidigare mejl.

Ju bättre du förklarar dina lösningar, desto större chans har du att komma med på Mattekollo 2021! Skriv ner dina tankar även om du inte har löst hela uppgiften, delpoäng kan vara avgörande.

Besked om antagning/reservplats skickas av oss senast den **27 maj**. I början av juni vet vi om kollot kan hållas på plats och då meddelar vi också antagningsbesked till reserver. Kom ihåg att anmäla dig som sökande på `http://mattekollo.se`! Detta gör du senast den **6 maj**.

Misströsta inte om vi inte har möjlighet att ta in just dig till årets kollo. Försök gärna igen nästa år!

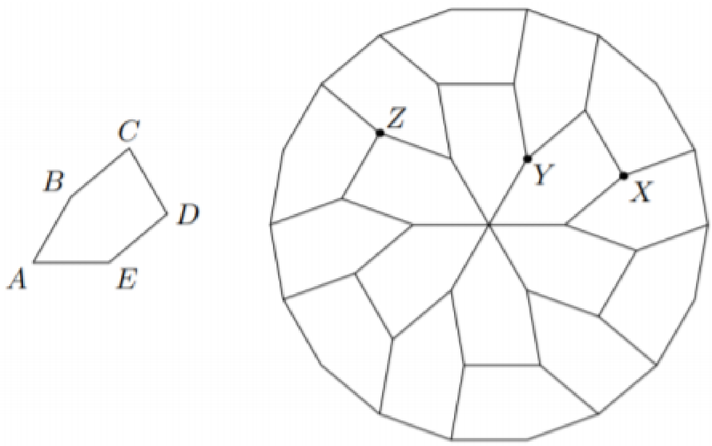
1. Går det att klippa upp en kvadrat med sidan 4 m i fyra likadana figurer, där omkretsen på varje figur är 2021 m? Om det går, hur kan man göra det? Om det inte går, förklara varför.

2. Två spelare turas om att skriva upp 1:or och 2:or på en rad efter varandra. Den som gör så att summan av några av de sista siffrorna är lika med exakt

(a) 533

(b) 1000 förlorar direkt. Vem av spelarna (den som börjar eller den som är tvåa) kommer vinna om båda spelarna undviker att förlora i det mån det är möjligt?

3. Den regelbundna 18-hörningen på bilden till höger är uppdelad i 18 femhörningar, som alla är kongruenta med $ABCDE$-femhörningen på bilden till vänster.



(a) Bestäm storleken på vinklarna A, B, C, D och E i femhörningen.

(b) Visa att punkterna X, Y och Z ligger på samma linje.

4. Ett $2 \times n$-rutnät kallas *trevligt* om det går att skriva in talen $1, 2, \ldots, 2n$ i dess rutor så att två tal i intilliggande rutor saknar gemensamma delare större än 1. Visa att om $n + 1$ är ett primtal så är $2 \times n$-rutnätet trevligt. (Rutor räknas som *intilligande* om de har en gemensam sida.)

5. Ett rationell tal är ett tal som kan skrivas som $\frac{a}{b}$ där a är ett heltal och b är ett positivt heltal. Alla andra tal på tallinjen kallas för irrationella.

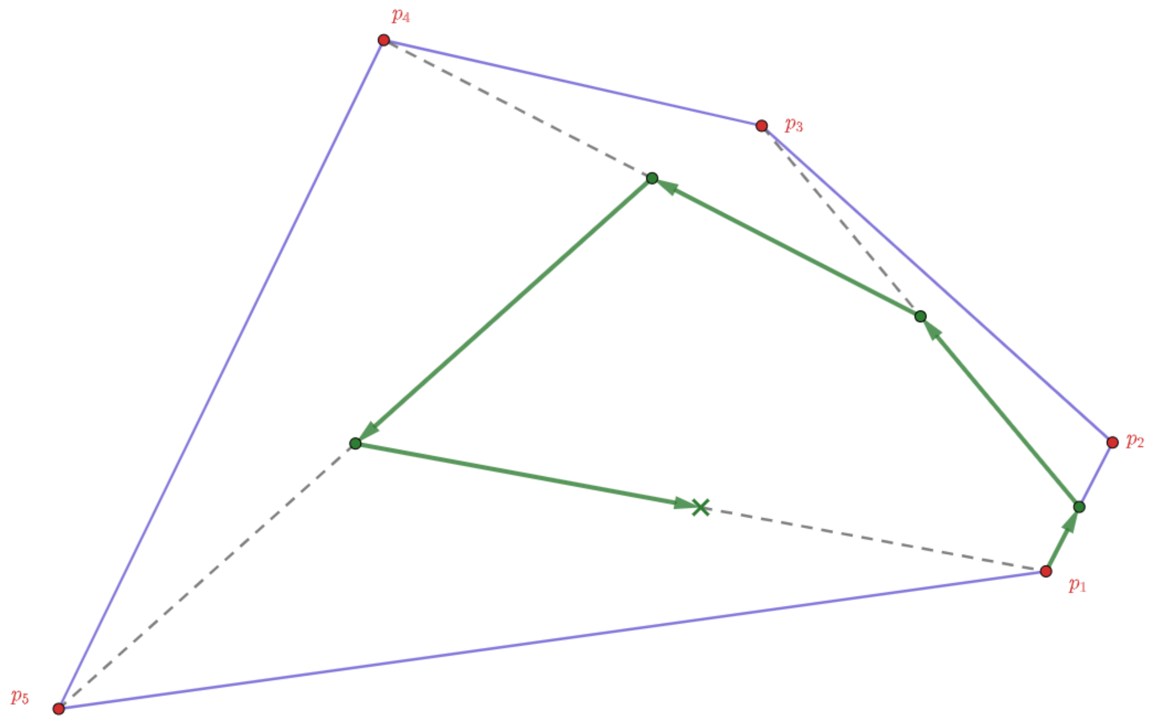
Stämmer det att om minst ett av talen x och y är irrationellt så är minst ett av talen $x^2 - y$, $y^2 - x$, $x + y$ irrationellt?

6. På en tallinje färgas alla punkterna på formen $81x + 100y$, där x och y är positiva heltal, i rött, och alla andra heltalspunkter färgas i blått. Bestäm en punkt A på linjen så att två heltalspunkter som är varandras speglingar kring A alltid är av olika färg.

7. Det finns två runda bord, runt varje bord sitter n tomtenissar. Varje tomtenisse är från början bara kompis med sina två bordsgrannar. En god trollkarl vill sätta alla tomtenissarna runt ett och samma runda bord, så att bordsgrannar fortfarande är kompisar. Han har den magiska kraften att skapa $2n$ nya kompispar. Men däreter kommer en ond trollkarl förstöra n kompispar utav de här $2n$ nya. För vilka n kan den goda trollkarlen uppfylla sin önskan oavsett hur den onda trollkarlen agerar?

8. I ∞-maraton springer de tävlande i en bana på formen p_1p_2, p_2p_3, ..., $p_{2021}p_1$ i all oändlighet (d.v.s man börjar om när man kommer tillbaka till p_1). En deltagare, *fuskiga Knut*, tänker fuska genom att endast springa halva vägen till varje punkt, d.v.s. först springer han halva sträckan till p_2, sedan springer han halva sträckan till p_3 osv.

När fuskiga Knut sprungit mot alla punkter säger vi att han sprungit ett varv och vi markerar hans position. Visa att markeringarna kommer närma sig en punkt.



Ett exempel på hur Knut skulle ha börjat springa i ett ∞-maraton med 5 punkter.