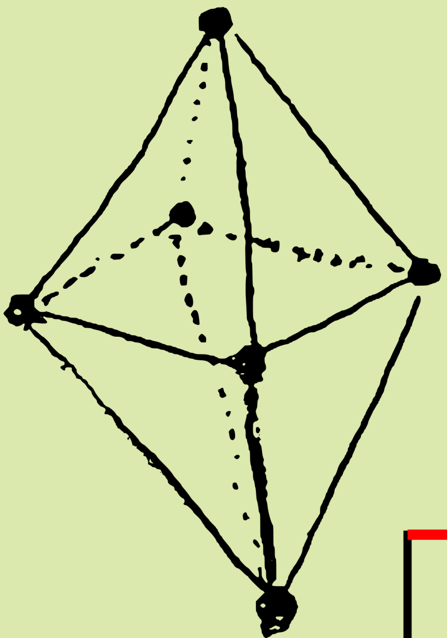
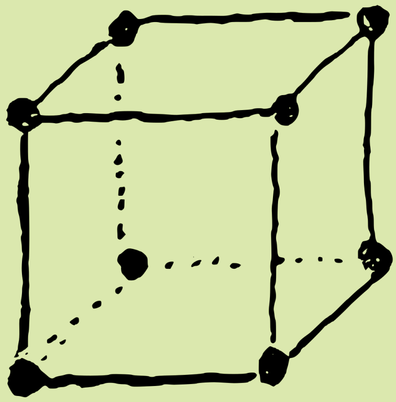
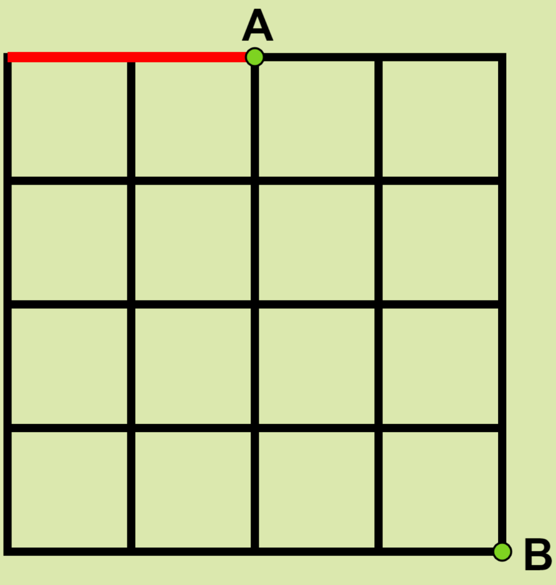
Mattekollo 2020

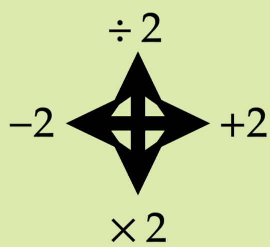
Lektionsmaterial

åk 6-9









Lektionsmaterial Mattekollo 2020

åk 6-9

V. Chapovalova, H. Eberhard, V. Jansson, D. Lindström, B. Verbeek

Norrtälje, juli-augusti 2020

Innehåll

Mattelektioner

1. Talbaser och lingvistik

1.1 Introduktion till talbaser

Denna introduktion till olika talbaser är riktad till den som aldrig hört talas om talbaser förut, har glömt vad det är, känner sig lite osäker på det eller bara är nyfiken på mer. Svårare uppgifter finns längst ned. Ni kommer att behöva kunskaper om olika talbassystem för att kunna lösa vissa uppgifter under lingvistiklektionerna.

Siffror i ett tal är värda olika mycket beroende på deras position, eller *platsvärden*. Till vardags använder vi talbas 10. Det innebär att om vi skriver talet 33 så är en siffra precis till vänster 10 gånger så mycket värd som den till höger. Som i 33: den vänstra 3:an representerar 30 och den högra bara 3.

$$33 = 3 \cdot 10 + 3 \cdot 1 \qquad 20 = 2 \cdot 10 + 0 \cdot 1 \qquad 123 = 1 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 3 \cdot 1$$

För att slippa skriva ut så många nollor brukar man skriva platsvärdet i *tiopotenser* ("upphöjt till"). $10^3 = 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000$. a^k betyder alltså a multiplicerat med sig själv k gånger. Notera att $a^0 = 1$ för alla $a \neq 0$.

$$72603 = 7 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0$$

Siffrorna 7, 2, 6, 0 och 3 i exemplet ovan anger helt enkelt hur många det finns av varje potens. Antagligen använder människor bas 10 eftersom vi har 10 fingrar. Om exempelvis en myra skulle kunna räkna utifrån antalet ben den har skulle de alltså räkna i talbas sex. ”123 bas sex” skrivs 123_{sex} och är uppbyggt av sexpotenser istället. $6^0 = 1$, $6^1 = 6$, $6^2 = 36$ och så vidare.

$$123_{sex} = 1 \cdot 6^2 + 2 \cdot 6^1 + 3 \cdot 6^0 = 1 \cdot 36 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 1 = 51$$

Det är underförstått att 51 ska tolkas som 51_{tio} om inget annat anges.

1. Hur skrivs 6 i bas 6? Hur skrivs 36? 42?
2. Skriv 105_{sex} i bas 10.

Notera man bara har så många siffror i sitt talsystem som basen: i bas sex används bara siffrorna $0-5$, för 6 skrivs ju som 10_{sex} (uttalas "ett-noll bas sex"), precis som vi i bas tio har tio siffror $(0-9)$.

3. Försök nu skriva talet 30 (bas tio) i bas *fyra*.

Olika talbaser har olika för- och nackdelar. Bas 10 råkar vara praktiskt för våra fingrar, men till exempel passar bas 2 (vanligtvis kallat ”binärt”) bra för datorer. Detta eftersom de bara kan vara ”på” (1) eller ”av” (0) (eller plus/minus) i någon ordning. Två lägen; två siffror: måste använda bas två! Det innebär samtidigt att fler positioner behövs för att kommunicera ett stort tal. Exempelvis blir $101_{\text{två}} = 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^0 = 5$. En annan vanlig talbas är hexadecimalt (bas 16). För baser över tio krävs fler siffror än de vanliga, vanligen används då bokstäver: A står för 10, B för 11, C för 12 och så vidare. I hexadecimalt har vi alltså siffrorna $0 - F$ ($F = 15$).

4. Skriv talet $2AF_{sexton}$ i bas tio.

5. Skriv talet 99_{tio} i bas 2, 6 och 16.

6. Vad är det största tvåsiffriga talet vi kan skriva i hexadecimalt (bas sexton)? Hur skrivs det talet plus 1? Svara i både bas sexton och bas tio.

Extrauppgift om du vill träna mer: Be en kompis att ge dig några tal att översätta till valfria baser. Har du förstått allt hittills är du redo för lingvistiklektionen.

7. Hur stort skulle det största n-siffriga talet vara i ett talsystem med bas k?

8. Beskriv med ord vad som händer när du multiplicerar ett tal med sin bas. *Testa dig fram med några olika exempel om du fastnar.*

9. Om $81_{tio} = 10000_c$, vilken är basen c?

10. Om $50653_{tio} = 1000_b$ för någon bas b, vad är b skrivet i bas b?

11. Beräkna basen b för vilken $5_b \cdot 21_b = 13X_b$ för någon siffra X och bas b.

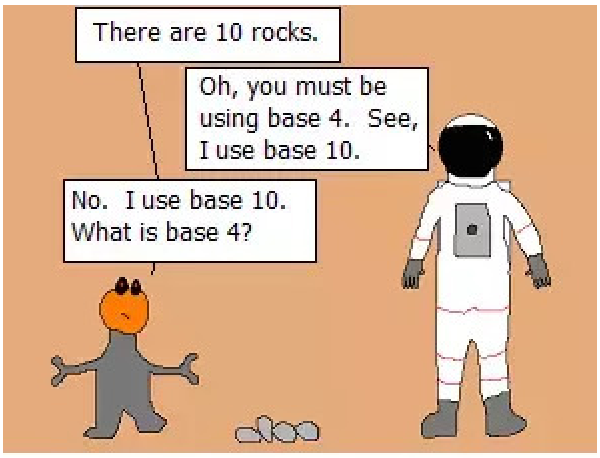
Svårare uppgifter

Följande uppgift är ett gammalt tävlingsproblem för en regional tävling för högstadieelever i USA. Klura gärna i grupp.

12. Beräkna basen för vilken $253_b \cdot 341_b = 74\underline{XYZ}_b$ för någon bas b och några siffror X, Y och Z.

Kunskap om talbaser kan även utnyttjas i vissa kombinatorikuppgifter. Ibland kan ett tal eller en händelse modelleras som ett binärt eller ternärt (bas 3) tal.

13. Beskriv ett sätt som alla 11-siffriga positiva heltal, sådana att dess siffror åt höger är icke-minskande, unikt kan skrivas som en sträng av 19 ettor och nollor. Exempel: 12345678999, 55555555555, 22223335778 (Om du kan, hitta hur många sådana tal det finns)



Every base is base 10.

"There are 10 types of people: Those who know binary and those who don't." "...and those who know ternary..." "...and..."

1.2 Lingvistik I

Lingvistik handlar om människans förmåga att kommunicera. Man undersöker bland annat språks uppbyggnad, likheter och skillnader mellan dem och hur de uttalas. Detta används bland annat för att bättre förstå hur människor kommunicerar med robotar, och att bygga artificiell intelligens som klarar av kommunikation med människor som talar okända språk.

När vi pratar om lingvistisk problemlösning använder vi främst logik och vetenskapligt tänkande. Det kan vara matematisk logik om vi exempelvis vill förstå ett språks talsystem, och/eller fonetisk logik (*fonetik* - läran om talljud) för att översätta saker. Kom ihåg att språk inte alltid är helt logiskt strukturerade; du kan behöva göra vissa antaganden för att lösa uppgifterna.

Malagassiska I följande uppgifter (14-16) ska du med hjälp av logisk slutledningsförmåga och rimliga antaganden försöka lära dig mer om *Malagasiska*, ett språk som talas på Madagaskar av runt 25 miljoner personer.
Detta är en introducerande uppgift för att bekanta dig med en lingvistikuppgifts uppbyggnad. Ställ frågor eller diskutera med personen bredvid dig om du fastnar.

14. Nedan följer en lista med ordgrupper på malagassiska och deras oordnade översättningar. Para ihop rätt ordgrupp med rätt översättning.

1. davenona votsy	a. brun lemur
2. gidro volontany	b. röd hatt
3. gidro votsy	c. röd jord
4. satroka mena	d. vit aska
5. satroka votsy	e. vit hatt
6. tany mena	f. vit lemur

15. Med dina lärdomar från uppgift 14, översätt till svenska:

(a) **gidro mena**

(b) **satroka volontany**

16. Översätt till malagassiska:

(a) röd aska

(b) grå lemur

[Lingolympiaden 2020 U1, *Åke Wettergren*]

Nen Nen är ett papuanskt språk som talas i södra Nya Guinea av omkring 250 personer. När vi räknar på svenska använder vi talbas 10. Det betyder att vi har speciella ord för 10 (tio), $10 \cdot 10$ (hundra), $10 \cdot 10 \cdot 10$ (tusen), och så vidare, och tio olika siffror (0-9). Även om väldigt många språk har talbas tio, så gäller det faktiskt inte för alla. Ett sådant exempel är nen.

17. Nedan ges 12 tal skrivna med siffror i talbas 10, samt deras översättningar till nen. Vilken är talbasen i nen?

1	**ambás**
2	**sombés**
3	**nambis**
4	**sombés a sombés**
6	**ambás pus**
7	**ambás pus ambás**
8	**ambás pus sombés**
15	**sombés pus nambis**
30	**widmátandás pus**
34	**widmátandás pus sombés a sombés**
37	**ambás prta ambás**
80	**sombés prta ambás pus sombés**

18. Skriv med vanliga siffror (bas 10):

(a) **widmátandás**

(b) **ambás pus sombés a sombés**

(c) **ambás prta ambás pus ambás**

19. Översätt till nen:

(a) 16

(b) 26

(c) 180

20. Skriv det största tal du vet hur man skriver i nen, och hur stort det är i vanliga siffror.

[Lingolympiaden 2019 U:B, *Amanda Kann & Åke Wettergren*]

Quechua Quechua är ett språk som talas av ungefär 9 miljoner personer i och omkring bergskedjan Anderna i Sydamerika. Nedan följer 10 ord på quechua, samt deras översättningar till svenska i en slumpmässig ordning.

1. laqha	a. mörker
2. laqha wasi	b. cykel
3. jatun tata	c. farfar; morfar
4. jatun yachay wasi	d. flygplan
5. k'ita uywap wasin	e. fängelse
6. k'ita wuru	f. metallhus
7. lata pisqu	g. pappa
8. lata wasi	h. universitet
9. lata wuru	i. vildåsna
10. tata	j. zoo

21. Para ihop orden på quencha (1-10) med sina svenska motsvarigheter (a-j). *Orden **wasi** och **wasin** betyder samma sak.*

22. Översätt följande ord till svenska:

(a) pisqu

(b) yachay wasi

[Lingolympiaden 2019 U:D, *Hampus Lane & Åke Wettergren*]
Sammanställning och anpassning av Benjamin Verbeek

1.3 Lingvistik extrauppgift

Ni har nu introducerats till lingvistik och har provat på några olika uppgiftstyper. Dagens uppgift kräver alla era nyförvärvade kunskaper inom lingvistik, samt matematisk slutledningsförmåga. Även fonetik kan vara till hjälp här. Arbeta i grupp.

Cherokesiska *Läs igenom hela uppgiften innan du börjar.*
Cherokesiska är ett irokesiskt språk som talas av cirka 2000 personer i de amerikanska delstaterna Oklahoma och North Carolina. Teckenkombinationen **qu** betecknar en konsonant och **v** betecknar en vokal.

Nedan följer ett antal matematiska likheter med tal på cherokesiska. De sex första är skrivna med det latinska alfabetet, medan de sex efterföljande är skrivna med det cherokesiska skriftsystemet. En likhet finns med i båda grupperna.

23. Skriv likheterna med siffror. Ni kan anta att cherokesiska använder bas 10.

1. ***tali*** × ***galiquogi*** = ***nigadu***
2. ***nvgi*** × ***sonela*** = ***tsoisgo sudali***
3. ***sonela***$^{\textit{\textbf{tali}}}$ = ***tsunelasgo sawo***
4. ***tsunela*** + ***galiquogi*** = ***hisgadu***
5. ***sowo*** + ***tali*** = ***tsoi***
6. ***sudali*** × ***galiquogi*** = ***nvgisgo tali***
7. $\text{ᏅᎩ}^{\text{ᏦᎢ}}$ = ᏑᏓᎵᏍᎪ ᏅᎩ
8. ᏦᎦᏚ + ᎯᏍᎩᏍᎪ ᎦᎵᏉᎩ = ᎦᎵᏆᏍᎪᎯ
9. ᏦᎢ × ᏍᎪᎯ = ᏦᎢᏍᎪᎯ
10. ᏌᏚ + ᏁᎳᏚ = ᏔᎵᏍᎪ ᏐᏁᎳ
11. ᎯᏍᎩ × ᏐᏁᎳᏚ = ᏐᏁᎳᏍᎪ ᎯᏍᎩ
12. ᏅᎩ × ᏐᏁᎳ = ᏦᎢᏍᎪ ᏑᏓᎵ

24. Skriv följande tal med siffror:

(a) ***hisgi*** (b) ***sadu*** (c) ***galiquasgohi*** (d) ***tsoisgohi*** (e) ***tsogadu***

(f) ᏔᎵᏚ (g) ᏑᏓᎵᏍᎪᎯ (h) ᎦᎵᏆᏍᎪ ᏌᏊ (i) ᎦᎵᏆᏚ

25. Skriv följande tal på cherokesiska (både med det cherokesiska skriftsystemet och med det latinska alfabetet):

(j) 1

(k) 15

(l) 18

(m) 40

(n) 56

(o) 91

Alla tal i problemet är mindre än 100. Observera att det finns två olika varianter av W, se till exempel likhet 10 i uppgift 23, efter likhetstecknet längst till vänster och höger; dessa två tecken är alltså *olika*. Om du använder något av tecknen, se till att det inte går att förväxla med det andra. Om du blir färdig snabbt finns extrauppgifter att få. Ställ frågor om du fastnar.

[Lingolympiaden 2020 U4, *Emil Ingelsten*]
Sammanställning och anpassning av Benjamin Verbeek

2. Algoritmer & spel

2.1 Algoritmer och spel

Algoritmiska uppgifter löses med en *algoritm*: ett "recept" som beskriver ett tillvägagångssätt steg för steg.

1. Anders har en stekpanna som det får plats två hamburgare på samtidigt. Han vill steka varje hamburgare på varje sida i 2 minuter i sträck. Anders är hungrig och vill steka tre hamburgare så fort som möjligt. Vilken är den kortaste tiden det kan ta? *Skriv Anders algoritm.*

2. I tre högar finns det 11, 7 och 6 tändstickor. På ett drag får man endast lägga över så många tändstickor till en hög, som redan finns där. Hur kan man på tre drag få alla högar att innehålla lika många tändstickor? *Skriv algoritmens tre steg.*

3. Du har en oändlig rad med rutor numrerade 0, 1, 2, ... En pjäs börjar på ruta 0. Vilka rutor kan den nå om den får gå fram

(a) 2 eller 3 steg åt gången?

(b) 3 eller 5 steg åt gången?

(c) 6 eller 10 steg åt gången?

4. Dihya och Anders spelar ett spel. Det ligger ett antal stenar i en hög, och under ett drag tar en spelare en eller två stenar. Den som tar sista stenen vinner. Dihya börjar, kan hon vara säker på att vinna om antalet stenar är

(a) 5?

(b) 9?

(c) 17?

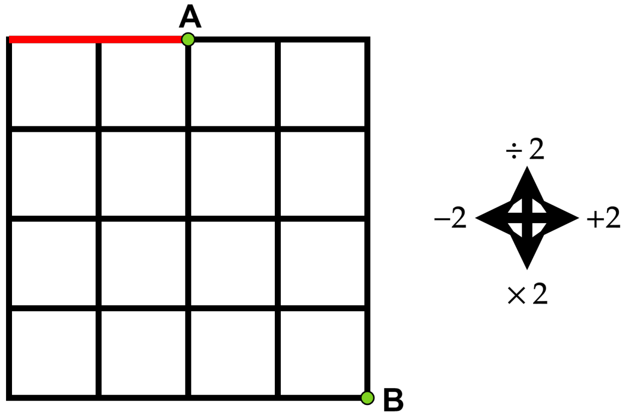
(d) 552?

(e) När kan Dihya garanterat vinna? Kan Anders garanterat vinna i de andra fallen?

5. Dihya och Anders har hittat på ännu ett spel. Nu är det 4096 $(= 2^{12})$ stenar på bordet. Under ett drag får man ta bort hälften eller tre fjärdedelar av de återstående stenarna (om det går). Den som inte kan göra ett drag förlorar. Dihya börjar. Kan Dihya garanterat vinna? På vilket sätt liknar det här spelet det i uppgift 4?

6. Vi kan ändra spelet i uppgift 4 så här: varje spelare får nu ta 1, 2 eller 3 stenar från högen. För vilka antal stenar i högen kan den första spelaren nu garanterat vinna? Om man får ta 1, 2, 3 eller 4 stenar? Vad ser du för mönster?

7. Anders ska gå på upptäcksfärd genom New York, och ska ta sig från punkt A till punkt B. De har infört en ny typ av turistskatt som innebär att den som går en gata åt höger måste betala +\$2, nedåt dubblerar ens nuvarande skatt, uppåt halverar skatten och åt vänster tar −\$2. Skatten betalas när Anders kommer fram till B. Man kan ha negativ skatt. Anders har redan gått den röda sträckan, och har alltså redan en skuld på \$4. Enligt lagen får han heller inte gå samma väg två gånger, men han får korsa en tidigare väg. Hur tar sig Anders från A till B utan att betala något i skatt? *Rita vägen.*



8. På bordet ligger sju kort med siffrorna 0 till 6 på. Två spelare turas om att plocka upp ett av korten från bordet. Den som först kan bygga ihop ett tal som är delbart med 17 utav sina kort kommer vinna. Vem vinner om båda spelar perfekt?

9. Det finns två stubintrådar. Varje stubintråd får man tända från vilken ände som helst, och den brinner i exakt 12 minuter. Tyvärr så brinner stubintrådarna med ojämn hastighet, det vill säga det är inte säkert att en halv tråd skulle brinna upp på exakt 6 minuter. Hur kan man ändå mäta exakt 9 minuter med hjälp av de två stubintrådarna?

10. **(a)** Det finns 4 oroliga vuxna på en flodstrand som står i en ring. Det finns bara en roddbåt med två platser i som är det enda sättet att komma över till andra sidan floden. Var och en av vuxna hade hört ett rykte om att deras högra granne hade smittats av coronaviruset. Om en vuxen hört ett sådant rykte om någon annan som vägrar man sätta sig tillsammans med den personen i båten. På stränderna får de inte prata med varandra, men på båten byter de alltid alla rykten de hört med varandra. Hur ska de alla komma över till andra sidan om högst två personer i taget får sitta i båten?

(b) Samma fråga men för 5 oroliga vuxna.

(c) Samma fråga men för 6 oroliga vuxna och var och en hade hört coronaryktet om de två närmaste som står till höger i cirkeln.

11. På lunchen satte sig sju kompisar runt det stora bordet i inre rummet. Under middagen vill de sätta sig där igen så att antalet personer emellan varje par av kompisar skulle förändras. Hur kan de göra det?

3. Kombinatorik

3.1 Kombinatorik I

1. **(Permutatoner)** På hur många olika vis kan går det att kasta om bokstäverna

   (a) KOL

   (b) KOLL

   (c) MATTEKOLLO.

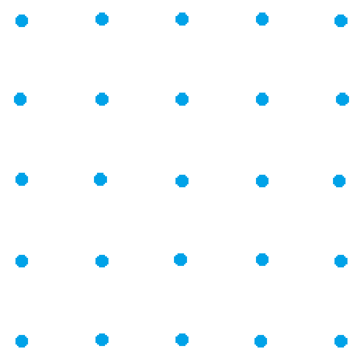
Ett annat ord för en omkastning av ordningen på några ting, till exempel bokstäver som står på rad, är en permutation. När vi kastar om bokstäverna i ett ord permuterar vi dom.

2. Valentina har fått ett virus på sin dator. Viruset letar igenom alla textfiler efter ordet MATTEKOLLO. När viruset har letat färdigt börjar viruset ändra ordet MATTEKOLLO. Varje minut byter viruset ut den bokstav längst till höger som inte är ett T till ett T.

   (a) På hur många sätt går det att kasta om ordet som är kvar när två minuter har gått?

   (b) Kommer antalet olika permutationer att bli färre för varje minut som går eller kan de öka någon minut? Förklara varför!

3. Bilden föreställer ett **gitter**. Vi kallar punkterna för **gitterpunkter**. En väg i ett gitter där varje steg går mellan två gitterpunkter kallas för en **gitterväg**.
Beräkna antalet gittervägar som börjar i gitterpunkten i det nedre vänstra hörnet, slutar i gitterpunkten i det övre högra hörnet, och endast består av steg till närmaste gitterpunkt uppåt eller högerut.



Ett rektangulärt 5x5-gitter

4. Några astronauter anländer med sina robotar till ett outforskat solsystem. I solsystemet finns fem planeter och expeditionen bestämmer sig för att utforska planeterna tillsammans i par. Det finns fem olika astronauter och med sig har dom två olika sorters robotar, tre av den ena sorten och två av den andra sorten. Robotarna är avancerade nog att utforska i robotpar. Hur många olika utforskningspar kan expeditionen bilda?

5. Sju vita katter sitter i rad ovanpå på en mur. En åttonde svart katt kommer och slår sig ned bredvid minst en av katterna. Sen kommer en till svart katt som också sätter sig bredvid minst en av katterna. På hur många olika vis kan katterna sitta uppradade på muren?

6. Skeppsdatorn på astronauternas rymdfarkost vaknar efter en tupplur och kan varken hitta sina astronauter eller sina robotar. Skeppsdatorn börjar fundera på hur den ska hitta sin besättning och funderar på var det är effektivast att börja söka. I processen beräknar datorn hur besättningens tio individer kan fördela sig på solsystemets fem planeter. Skeppsdatorn kan inte skilja besättningens medlemmar från varandra och den kan inte heller skilja planeterna från varandra. Vad kommer skeppsdatorns beräkning fram till?

Ledtråd: I föregående problem, när den första svarta katten kommer och sätter sig på muren så delar den in de vita katterna i två grupper, de till höger och de till vänster.

3.2 Kombinatorik och sannolikhetsteori II

1. Valentina singlar en slant två gånger.

(a) Vad är sannolikheten att bägge mynten hamnar med krona upp? Hade det spelat någon roll om hon har två mynt som hon singlar en gång?

(b) Vad är sannolikheten att mynten visar olika sidor (alltså en krona och en klave)?

2. Tusen år i framtiden har ett datavirus ätit upp alla problem från Mattekollo2020. Viruset rapar upp en bokstav från ordet MATTEKOLLO.

(a) Vad är sannolikheten att bokstaven är ett T?

(b) Säg att viruset rapade upp ett T, och sen rapar upp en ytterliggare en bokstav, vad är sannolikheten att denna också är ett T?

(c) Vi spolar tillbaka tiden till precis innan den första bokstaven rapas upp. Vad tror du att sannolikheten att viruset rapar upp ett T och sen ett till T är?

3. Benjamin har tränat på att slå tärningar sen han var liten och slår nu tärning på elitnivå. I år kämpar han för VM guldet i tärning som hålls i Jakarta.

(a) Benjamin slår bäst i sin kvalgrupp, i sista matchen behöver slå tre 6:or på rad. Hur stor var sannolikheten att han inte skulle lyckas med det?

(b) För att vinna i semifinalen behöver Benjamin slå summan 7 på två 6-sidiga tärningar. Vad är sannolikheten att Benjamin går vidare till final?

4. Spionerna A och B har varsin väska. I vardera väska ligger bollar i färgerna, blå, grön, orange, röd och violett, en av varje färg. A väljer slumpvis en boll från sin väska och lägger i väskan som tillhör B, sen väljer B slumpvis en boll från sin väska och lägger den i As väska. Vad är sannolikheten väskorna innehåller samma färger efteråt?

5. En grämling som gör alla sina val slumpvis har gått vilse i den binära skogen. Var hundrade meter delar sig vägen i den binära skogen i två. Grämlingen kommer inte ihåg hur den valt sin väg men den kommer ihåg att vägen har delat sig fyra gånger. Grämlingen vet att i någon av vägens femte delningar så finns det en väg ut ur den binära skogen. Vad är sannolikheten att grämligens nästa vägval tar den ut ur den binära skogen?

6. Ett experiment kan lyckas eller misslyckas, bägge utfall är lika sannolika. Om vi utför experimentet fem gånger, vad är sannolikheten att precis 3 experiment lyckas och två misslyckas?

7. I Grämlingistan finns två språk, Babosh och Geggy. 60% av alla grämlingar talar Babosh och 71% talar Geggy. Vad är sannolikheten att en slumpvis vald grämling talar Babosh men inte Geggy?

8. Det visar sig att 45% av alla grämlingar kan fraserna från en populär yoghurtreklam på Baboshesiska oavsett om de kan tala Babosh eller inte. Vad är sannolikheten att en grämling som kan fraserna från yoghurtreklamen kan tala Babosh?

9. **(Icke-transitiva tärningar.)** Det finns tre tärningar. På den första står talen 5,7,8,9,10,18. På den andra 2,3,4,15,16,17. På den tredje 1,6,11,12,13,14. I ett spel med tärningarna väljer den första spelaren en tärning, sen väljer den andra spelaren en tärning av de två som är kvar och sedan slår de sina tärningar. Den spelare som slår störst vinner. Vem av spelarna har störst chans att vinna?

10. En orättvis sexsidig fusktärning är gjord så att slå talen 1-6 står i relation på följande vis 1:2:3:4:5:6. Det betyder att sannolikheten att slå k är k gånger så stor som att slå en 1:a. Alltså är sannolikheten att slå till exempel en trea 3 gånger så stor som sannolikheten att slå en etta. Hur stor är sannolikheten att du sammanlagt slår en 7:a om du slår en sådan tärning två gånger?

11. Två personer A och B singlar slant. A singlar singlar sin slant 10 gånger medan B singlar sin slant 11 gånger. Hur stor är sannolikheten att B får fler krona än vad A får?

12. Det finns 100 platser på ett flygplan som ska flyga till Grekland. Det har precis blivit tillåtet att flyga dit så flyget är fullbokad. Terroristen Georg kommer in först och är nervös så han sätter sig på en slumpvis vald plats (som inte behöver vara hans egna). Därefter kommer vanliga passagerare in, en i taget. Om passagerarens egna plats är tom sätter hen sig på den, medan om den är upptagen så sätter hen sig på en slumpvis vald ledig plats. Tanten Olivia kommer in sist. Vad är sannolikheten att hon kommer finna just sin egen plats ledig?

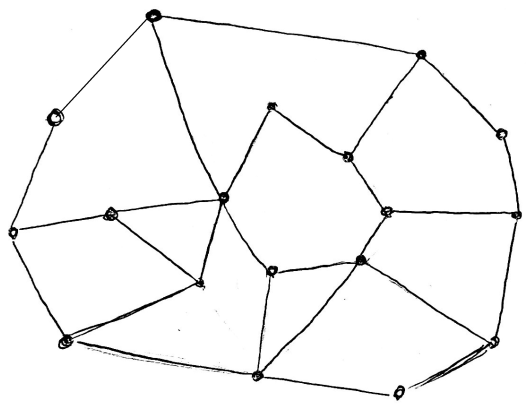
4. Grafteori

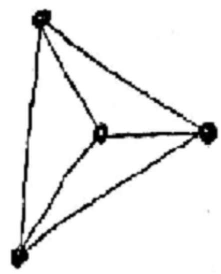
4.1 Grafteori I

1. Bilden nedan till vänster visar en graf. En graf består av hörn (punkter) och kanter (sträckor).

(a) Hur många kanter har grafen, hur många hörn?

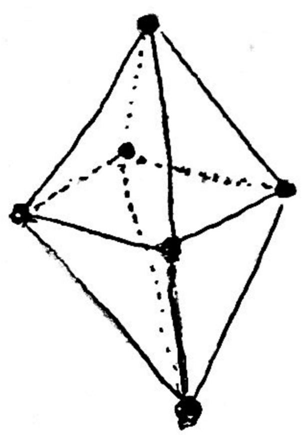
(b) En grupp hörn ringar in en sida, hur många sidor har grafen?

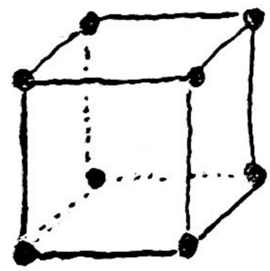




2. Grafen på bilden ovan till höger är en tillplattad tredimensionell figur. Figuren är *regelbunden*, det vill säga alla dess sidor är lika stora, liksom alla kanter och vinklar vid alla hörn. Hur ser figuren ut i tre dimensioner?

3. Bilden visar en oktaeder och en kub (hexaeder). Hur ser de ut tillplattade? Kan du rita deras grafer på papper så att kanterna endast möter varandra i figurens hörn (dvs inte korsar varandra)?





4. En polyeder är en tredimensionell kropp vars sidor är månghörningar (polygoner). De konvexa (utåtbuktande) regelbundna polyedrarna kallas för de *Platonska kropparna*. Tetraedern, kuben och oktaedern är tre av de Platonska kropparna.

(a) Hur många hörn, kanter, och sidor har de?

(b) Hur många kanter möts i de olika figurernas hörn?

(c) Hur många sidor möts i de olika figurernas hörn?

5. Det finns totalt fem Platonska kroppar, så det är bara två som vi inte har sett. Den ena är dodekaedern, som har 12 femkantiga sidor, och den andra är ikosaedern som har 20 trekantiga sidor.

(a) Hur många trianglar möts i varje hörn på en ikosaeder?

(b) Hur stora är vinklarna i regelbundna trianglar, fyrhörningar, femhörningar och sexhörningar?

(c) Varför finns kandet inte finnas fler än fem Platonska kroppar?

6. En 3D-printande robot kan som bekant skriva ut i tre dimensioner. Roboten fick en vit kub och markerade en rosa prick i mitten på var och en av kubens sidor. Sedan skrev roboten ut förbindanande rosa raka länkar mellan varje par av prickar som motsvarade två grannsidor på kuben. Vad skrev roboten ut för rosa figur? Vad skulle hänt om roboten istället hade gjort samma sak med en tetraeder; en oktaeder; en dodekaeder; en ikosaeder?

7. Rita grafen för en
(a) ikosaeder **(b)** dodekaeder
så att kanterna inte korsar varandra.

8. En gammaldags fotboll är ihopsydd av 32 lappar: vita sexhörningar och svarta femhörningar. Varje svart lapp gränsar till bara vita, varje vit lapp gränsar till tre vita och tre svarta lappar. Hur många vita lappar finns det i en fotboll?

9. Visa att en godtycklig konvex polyeder alltid har två sidor som har samma antal kanter.

10. Visa att det inte existerar någon polyeder som har exakt sju kanter.

11. En myra kryper på en dodekaeders kanter och den vänder aldrig om. Myran slutar i samma punkt som den börjar. Det visar sig att rutten går igenom varje kant exakt två gånger. Visa att myran passerar någon kant i samma riktning båda gångerna.

4.2 Grafteori II

För att spela Sprouts krävs två spelare, en yta att rita på (t. ex. ett papper), och minst en penna. Innan spelet börjar ritar spelarna några punkter på ett papper. De turas sedan om att ta sin tur. På sin tur ska spelaren rita en kurva som går mellan två punkter (eller från en punkt till sig själv), sedan gör hen en punkt någonstans på kurvan hen ritat.

- Kurvan får vara rak eller böjd men får varken korsa sig själv eller någon annan linje, eller gå igenom andra gamla punkter än dess ändar.
- Den nya punkten som spelaren sätter ut får inte ligga i någon av kurvans ändpunkter, den måste dela upp kurvan i två delar.
- Ingen punkt får ha mer än tre anslutna linjer. En linje från en punkt till sig själv räknas som två anslutna linjer och nya punkter räknas som om de redan har två anslutna linjer.

Den sista spelaren som kan göra ett drag vinner, alltså förlorar den spelare som är först med att inte kunna genomföra sin tur.

1. Två spelare spelar Sprouts. De är mitt i spelet och alla punkterna hänger ihop i ett enda system (en sammanhängande graf). Vi ska titta på hur antalet hörn (v), antalet kanter (e) och antalet sidor (f) förändras när en spelare gör sin nästa tur.

(a) Låt säg att spelaren har dragit en ny kant mellan två punkter, men inte har satt ut en ny punkt ännu. Antalet kanter har ju ökat med exakt 1, men har antalet sidor ändrats? Med hur mycket i så fall? Och antalet hörn?

(b) Nu gör spelaren sista delen av sin tur genom att sätta ut en ny punkt på linjen den precis har dragit. Hur ändras antalet hörn, kanter och sidor nu?

(c) Kommer något utav talen $v-e$, $e-f$ eller $v-f$ att förbli samma tills matchen är slut för dessa två spelare?

(d) Vad kan $v-e+f$ vara lika med om spelgrafen är sammanhängande? Ange minst ett exempel. (Tänk på en så enkel graf som möjligt.)

> **Definition.** En *planär* graf är en graf som man kan rita på ett papper utan att kanterna korsar varandra.

(e) * Visa att $v-e+f$ alltid är samma tal för alla sammanhängande planära grafer.

Ledtråd: ta först bort alla kanter ur grafen så att det inte längre finns några cykler i den och sedan lägg tillbaka dem igen, en i taget.

Sats 4.1. Eulers formel för planära grafer: v är antalet hörn, e är antalet kanter och f är antalet sidor i en sammanhängande graf. Då gäller:

$$v - e + f = 2$$

2. **(a)** Leta upp dina svar från förra lektionen om grafteori. Stämmer Eulers formel på grafen från första uppgiften från den lektionen?

   (b) Stämmer Eulers formel för graf som består av ett enda hörn och inga kanter?

   (c) Stämmer Eulers formel för tetraedern? kuben? oktaedern?

   (d) Kom på en egen polyeder och rita hur den ser ut på ett ungefär. Den behöver inte vara regelbunden. Kolla om Eulers formel stämmer för den.

   Definition. Roboten som skrev ut i rosa på förra lektionen konstruerade så kallade *dualer*. Den ritade en ny graf genom att rita punkter på gamla grafens sidor och förbinda de punkterna var motsvarande sidor låg grannar med varandra.

   (e) Konstruera dualen till polyedern du kom på. Stämmer Eulers formel för den? Hur ändrades antalet sidor, hörn och kanter om man jämför med polyeder du startade med?

Extrauppgifter

3. Vilket är det största möjliga antalet drag som kan göras i en Sprouts-match om man startar med n noder?

4. En planär graf har tio sidor. Vilket är det minsta antalet kanter den kan ha?

5. Vi kan mäta omkretsen på en sida i en graf genom att räkna kanterna som omgärdar sidan. Om vi tar en graf och gör en lista där vi skriver ned omkretsen för varje sida i grafen och sedan summerar talen i listan får vi ett tal, vi kan kalla talet S. Visa att om vi beräknar S för en graf så kommer talet att vara dubbelt så stort som antalet kanter i grafen.

6. Kombinera resultaten från de två föregående uppgifterna med eulers formel för att visa att olikheten $3v - 6 \geq e$ är sann för alla sammanhängande planära grafer med minst tre hörn.

7. En graf där varje hörn har en kant till varje annat hörn brukar kallas *komplett*. Den kompletta grafen på fem kanter brukar skrivas kort med K_5, uttalas "K-fem". Visa att K_5 inte går att rita på ett papper utan att några kanter korsar varandra.

8. Sex små robotar står på ett skrivbord, tre längs den vänstra sidan och tre längs den högra. Går det att dra sladdar som kopplar ihop varje robot på den vänstra sidan med varje robot på den högra sidan utan att varken direktkoppla två robotar som står på samma sida av skrivbordet eller låta två sladdar korsa varandra? *Grafen som detta problem ger upphov till kallas ibland för $K_{3,3}$.*

5. Klippgeometri

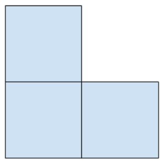
5.1 Rutiga figurer

När vi säger *dela upp* menar vi att hela figuren ska delas upp, ingenting ska bli över och delarna får inte ha någon som helst överlapp.

1. Dela upp ett 8x8 schackbräde där man tagit bort alla hörnrutorna i 1x2-brickor.
2. Dela upp följande figur i trerutiga vinkelhakar:

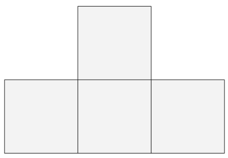
   (a) Ett schackbräde där man tagit bort en hörnruta.

   (b) Ett schackbräde där man tagit bort en av mittenrutorna.



En trerutig vinkelhake

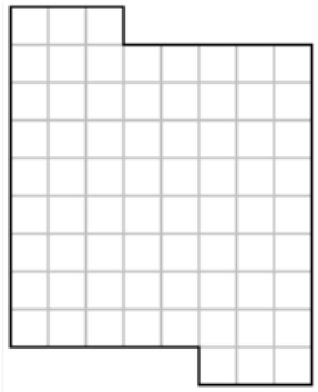
3. Hur kan man bygga ihop en 60x60-kvadrat utav T-tetraminos (se bild)?



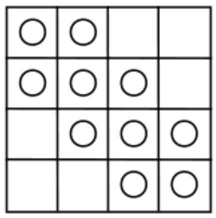
T-tetramino

4. Utav en 17x17-kvadrat lämnade bara kvar kanten som var 1 ruta bred. Dela upp ramen i 8 delar och bygg ihop dessa delar till en kvadrat utan hål.
5. Dela upp ett schackbräde utan ett hörn i färre än 10 likadana rektanglar.
6. Dela upp en 5x5-kvadrat längs med rutgränserna i 7 olika rektanglar.

7. På hur många sätt kan figuren på bilden delas upp i 1x5-rektanglar längs med rutgränserna?



8. I en 4x4-kvadrat markerade man 10 rutor (se bild). Dela upp kvadraten i fyra likadana delar så att de innehåller 1, 2, 3 respektive 4 markerade rutor.



9. Kan man alltid dela upp ett 128×128-bräde i trerutiga vinkelhakar om en ruta är borttagen, oavsett vilken?

Extrauppgift

10. Dela upp en 1×5-rektangel i fem delar och bygg ihop en kvadrat utav de delarna.

5.2 Area och omkrets

Alla figurerna i problemen nedan är ritade på ett (oändligt) rutat papper där figurernas sidor samt klippningar alltid går längs med rutgränserna.

1. **(a)** Vilken är den största möjliga arean som en rektangel med omkrets 40 kan ha? Vilken är den minsta?

   (b) Samma frågor för en rektangel med omkretsen 30.

2. **(a)** Vilken är den största möjliga arean som en rektangel med omkretsen 40 kan ha? Vilken är den minsta?

   (b) Samma frågor för en rektangel med omkretsen 30.

3. **(a)** Vilken omkrets har en rektangel med arean 29?

(b) Vilken är den största omkretsen som en rektangel med arean 80 kan ha? Och den minsta?

4. Vilken är den största möjliga omkrets för en figur med arean 13?

5. **(a)** I hur många rektanglar kan man som mest dela upp ett schackbräde om man vet att alla rektanglarna har samma area och det finns rektanglar som är olika?

(b) I hur många rektanglar kan man som mest dela upp ett schackbräde om man vet att alla rektanglarna har samma omkrets och det finns rektanglar som är olika?

6. **(a)** Kan en 4×4-kvadrat delas upp i tre bitar som alla har samma area?

(b) Kan en 4×4-kvadrat delas upp i tre bitar som alla har samma omkrets?

(c) Kan en 8×8-kvadrat delas upp i sju bitar som alla har samma omkrets?

(d) Kan en 8×8-kvadrat delas upp i sju rektanglar som alla har samma omkrets?

7. Ett schackbräde delades upp i tre månghörningar (figurer utan hål) med samma omkrets. Hur stor kan den omkretsen vara som mest?

8. Sjuan Gabriel delade upp en kvadrat i sju delar som alla hade samma omkrets, medan åttan Erik delade upp en likadan kvadrat i åtta delar med samma omkrets. Kan Gabriels delar ha mindre omkrets än Eriks delar?

9. A och B är rektanglar.

(a) Kan det vara så att A har större omkrets än B, men B har större area än A?

(b) Kan arean för rektangeln A vara mindre än 10% av arean av en viss kvadrat B, samtidigt som att A:s omkrets är mer än 10 gånger så stor som B:s?

10. **(a)** En kvadrat delas upp i två figurer, A och B. Kan arean för A vara minst lika stor som två gånger arean för B, samtidigt som omkretsen för B är åtminstone dubbelt så stor som omkretsen för A?

(b) Samma fråga om kvadraten delas upp i två månghörningar.

5.3 Godtyckliga figurer

När vi säger *dela upp* menar vi att hela figuren ska delas upp, ingenting ska bli över och delarna får inte ha någon som helst överlapp.

Obs: ”godtycklig” betyder ”vilken som helst” (någon annan väljer vilken).

”Kongruent” betyder ”exakt likadan” (möjligen speglad eller roterad).

1. Kan en godtycklig triangel delas upp i

(a) i fyra rätvinkliga trianglar?

(b) i tre parallelltrapetser?

(c) i fyra likbenta trianglar?

2. Kan en kvadrat delas upp i kongruenta parallelltrapetser med vinkeln $179°$?

3. En triangel delades upp i två mindre kongruenta trianglar. Visa att den ursprungliga triangeln var likbent.

4. Dela upp en godtycklig triangel i två delar som sedan kan byggas ihop till ett parallellogram.

5. Rita en figur som kan delas upp i tre kongruenta trianglar men också kan delas upp i fyra kongruenta fyrhörningar.

5.4 Korrespondens

1. Går det att dela upp en kvadrat i

(a) två icke-kongruenta femhörningar med samma omkrets?

(b) två icke-kongruenta sexhörningar där för varje sida som den ena har så har den andra minst en sida som är lika lång?

(c) en femhörning och en sexhörning så att för var och en av sexhörningens sidor så går det att hitta minst en sida hos femhörningen som är lika lång?

2. Går det att dela upp en kvadrat i

(a) en åttahörning och 4 trianglar?

(b) en 16-hörning och 4 trianglar?

(c) en 34-hörning och 3 tiohörningar?

(d) en 33-hörning och 3 tiohörningar?

(e) en 35-hörning och 3 tiohörningar?

3. Går det att dela upp en kvadrat i

(a) 4

(b) 7

(c) 6

(d) 8

(e) 3

(f) 5

mindre kvadrater? Visa hur man gör om det går och bevisa varför det inte går om det inte gör det.

Vinklar

Om två figurer *gränsar* så måste de ha en nollskild gränssträcka gemensam.

4. Kan en kvadrat delas upp i liksidiga trianglar?

5. Kan en kvadrat delas upp i likbenta trianglar som har 75°-vinklar vid basen?

6. Kan en kvadrat delas upp i trianglar på så sätt att varje triangel gränsar till exakt fyra andra?

5.5 Bolyai-Gerwiens sats

Definition. Två månghörningar kallas för *likbildade* om man kan dela en av dem i ett antal delar och bygga ihop den andra av samtliga delarna. Med andra ord kallas det att man kan bygga om en månghörning till en annan. Så klart har likbildade månghörningar lika stora areor.

Sats 5.1. Sats (Wallace-Bolyai-Gerwien). Om två månghörningar har lika stor area så är de likbildade.

För att bevisa satsen, bevisa påståenden 1 till 7 samt satsen 8 i valfri ordning. Du får använda tidigare påståenden när du bevisar påståendet 7 och satsen 8.

1. Om månghörningarna P och Q är likbildade och månghörningarna Q och R är likbildade så är även månghörningarna P och R likbildade.

2. En *konvex* månghörning är en månghörning där alla vinklarna är under 180°. En godtycklig månghörning (även icke-konvex) kan delas in i ett antal konvexa månghörningar.

3. En godtycklig konvex månghörning kan delas in i ett antal trianglar.

4. En godtycklig triangel kan byggas om till en rektangel.

5. En godtycklig rektangel kan byggas om till en rektangel där ena sidans längd är mellan 1 cm och 2 cm.

6. Låt $a \leq b \leq 2a$. En godtycklig rektangel där en sida har längden b kan delas in i högst tre delar och byggas om till en rektangel där en sida har längden a utav de delarna.

7. En godtycklig månghörning kan byggas om till en rektangel där en sida har längden 1 cm.

8. Om två månghörningar har lika stor area så är de likbildade.

9. Hitta på ett sätt att bygga om en rektangel av storleken 5×1 till en kvadrat.

10. Dela rektangeln av storleken 3×1 i högst sex delar och bygg en kvadrat av de delarna.

11. Dela rektangeln av storleken 3×4 i tre delar och bygg en kvadrat av de delarna!

12. Bygg om en kvadrat till tre lika stora kvadrater. Du får skära den ursprungliga kvadraten i högst

  (a) 10 delar.

  (b) 7 delar.

13. Bygg om en kvadrat till en liksidig triangel. Du får skära kvadraten i högst

  (a) 10 delar.

  (b) 5 delar.

6. Talteori - gula gruppen

6.1 Introduktion

Talteori handlar om heltalens egenskaper. Därför börjar vi med att se till så att vi vet vad vi menar med heltalen.

De naturliga talen är precis talen $1, 2, 3, ...$, och vi brukar beteckna denna mängd av tal med $\mathbb{N}$. Ni känner alla till att vi kan addera naturliga tal, till exempel är $4 + 5 = 9$. Vi kan också multiplicera tal, genom att addera ett tal till sig självt flera gånger: $4 \cdot 3 = 4 + 4 + 4 = 12$.

Om vi också lägger till negativa tal och 0 så får vi heltalen: $..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...$, en mängd av tal som vi brukar beteckna med $\mathbb{Z}$. Med dessa tal till hands så kan vi alltid hitta en additiv invers till varje tal, alltså att det för varje tal x finns ett tal $-x$ så att $x + (-x) = 0$. Det gör också att vi alltid kan subtrahera tal: för vilka heltal x, y som helst så kan vi få ett nytt heltal som skillnaden $x - y$ (notera att detta faktiskt inte var möjligt så länge vi bara kände till de naturliga talen, försök till exempel ta 4 minus 7 - det går inte!)

Hur heltalen beter sig när vi bara adderar och subtraherar dem är väldigt enkelt att förstå, för den som är intresserad och har hört talas om gruppteori så är heltalen vad man kallar för en cyklisk grupp under addition, där alla element kan genereras av bara talet 1. Däremot är det inte alls lika uppenbart hur $\mathbb{Z}$ beter sig när vi multiplicerar tal!

Till att börja med så är ju subtraktion som en form av baklängesaddition: om vi vet att $x + 3 = 7$ så tar vi reda på vad x är genom att subtrahera 3 från 7, och får $x = 7 - 3 = 4$. Finns det på samma sätt någon form av baklängesmultiplikation? De flesta av er vet säkert att baklängesmultiplikation är det vi kallar för division. Om vi till exempel vill hitta ett x så att $3x = 12$ så dividerar vi 12 med 3 och får $x = \frac{12}{3} = 4$. Men vad händer om vi istället vill hitta x så att $4x = 15$? Här uppstår genast problem - det finns inget sådant heltal x! Så det verkar som att vi kan dividera tal ibland, medan vi ibland inte kan göra det.

En annan observation vi kan göra är att vi kunde få alla tal genom att addera och subtrahera 1 till och från sig själv. Finns det något motsvarande tal för multiplikation? Först och främst blir frågan lite orättvis om vi får använda subtraktion i det första fallet, eftersom vi redan konstaterat att det inte finns någon motsvarande baklängesmultiplikation i det andra fallet. Men notera att vi faktiskt till och med kan få alla naturliga tal genom att bara lägga till 1 till sig själv, medan vi definitivt inte finns något tal motsvarande 1 för multiplikation. En naturlig fråga att ställa sig blir hur många och vilka tal vi egentligen behöver för att få alla tal genom bara multiplikation?

Dessa och många andra frågor kommer vi försöka svara på eller i alla fall förstå bättre under kommande lektioner. Att ta reda på mer om hur heltalen beter sig under multiplikation är faktiskt en stor del av vad den elementära talteorin handlar om.

6.2 Delbarhet

Som vi noterade tidigare så kan vi ibland dividera tal, eller göra baklängesmultiplikation. När detta går säger vi att ett tal är delbart med ett annat tal. Vi har följande definition:

Definition. Vi säger att ett heltal b är **delbart** med ett heltal a om det existerar ett heltal k så att $ak = b$, och skriver $a \mid b$. Man kan även säga att a **delar** b, att b är en **multipel** av a eller att a är en **delare** till b.

Här kommer några egenskaper som kan vara bra att ha i åtanke:
Här är $|x|$ absolutbeloppet: $|x| = x$ för $x \geqslant 0$ och $|x| = -x$ för $x \leqslant 0$ (minustecken tas bort).

(a) $x \mid x$

(b) Om $x \mid y$ och $y \mid z$ så gäller att $x \mid z$

(c) Om $x \mid y$ och $y \neq 0$ så är $|x| \leq |y|$

(d) Om $x \mid y$ och $x \mid z$ så gäller att $x \mid ay + bz$ för alla heltal a och b

(e) Om $x \mid y$ och $x \mid y \pm z$ så gäller att $x \mid z$

(f) Om $x \mid y$ och $y \mid x$ så gäller att $|x| = |y[$

(g) Om $z \neq 0$ så gäller att $xz \mid yz$ om och endast om $x \mid y$

Denna lista kanske ser lite skrämmande ut, särskilt med tanke på att det finns en massa symboler som man måste förstå. Men i själva verket är de flesta påståendena sådant ni redan vet och kanske använder utan att tänka på det, när man väl lyckats dekryptera vad som står.

Vi tar (b) som exempel, så får ni försöka övertyga er om att de andra stämmer själva. Villkoret $x \mid y$ är samma sak som att säga att $y = kx$ för något heltal k, och $y \mid z$ är samma sak som att säga att $z = my$ för något heltal m. Om vi kombinerar detta så får vi att $z = my = (mk)x$, som betyder att $x \mid z$, klart!

1. Avgör om

(a) 21 är delbart med 7

(b) 15 är en multipel av 4

(c) 10 är en delare till 2

(d) 7 är en delare till 0

2. Vilka heltal n har 0 som delare?

3. Skriv ner alla delare till:

(a) 30

(b) 19

(c) 91

(d) 36

Hur många positiva delare har varje tal? Är antalet delare jämnt eller udda?

4. Förklara varför egenskap (a) till (g) i teoriavsnittet av dagens lektion gäller.

5. I en galax långt långt borta finns det bara mynt av 2 valörer: 15 och 21. Visa att för oavsett hur många sådana mynt du har av varje valör så kommer din förmögenhet vara delbar med 3.

6. Hitta det minsta talet med 8 olika positiva delare.

7. Karin väljer fem tal ur mängden $\{1,2,3,4,5,6,7\}$ och berättar för Sebastian vad deras produkt är. Det visar sig att det inte är tillräckligt med information för att avgöra om summan av talen är jämn eller udda. Vad är produkten av talen?

8. Visa att antalet positiva delare till ett positivt heltal n är max $2\sqrt{n}$. (Roten ur n, skrivet $\sqrt{n}$, är ett positivt tal med egenskapen att $\sqrt{n}^2 = n$).

9. Visa att ett positivt heltal har ett udda antal positiva delare om och endast om det är en kvadrat.

10. Visa att n^2 är en multipel av 2 om och endast om n är en multipel av 2. Är samma sak sant för 3? Vad om 4? (Du får inte använda aritmetikens fundamentalsats, alltså att varje tal är en produkt av primtal på ett unikt sätt, även om du vet det sen innan!)

11. Låt summan av de positiva delarna till n betecknas med $\sigma(n)$. Visa att $\sigma(1)+\sigma(2)+\ldots+\sigma(n) \leq n^2$.

12. (IMO 2002) De positiva delarna till n är $1 = d_1 < d_2 < \ldots < d_k = n$. Visa att $d_1d_2 + d_2d_3 + \ldots + d_{k-1}d_k < n^2$.

6.3 Primtal

I uppgifterna till förra avsnittet upptäckte vi att vissa tal har många delare medan andra har få. Till exempel har 36 ganska många positiva delare, hela 9 stycken, medan 19 bara delas av 1 och sig självt. Tal som bara delas av ett och sig självt är speciella, eftersom de garanterat inte kan byggas upp som en produkt av andra positiva heltal. För att återvända till frågan från introduktionen så vet vi att alla dessa tal måste finnas med om vi ska välja en mängd av tal som kan generera alla naturliga tal genom bara multiplikation. Vi kallar dem för primtal.

Definition. Vi säger att ett heltal $p > 1$ är ett **primtal** om det bara delas av 1 och sig självt. Vi säger att ett heltal $n > 1$ är **sammansatt** om det inte är ett primtal, alltså om $n = ab$ för två heltal a och b som båda är större än 1.

Ett sätt att kolla om ett tal är ett primtal är att helt enkelt prova dividera talet med alla möjliga tal som är mindre. Orsaken att det funkar är att om a och b är positiva tal, och $a \mid b$, så måste också $a \leq b$, eftersom det existerar ett heltal k så att $b = ak > a$ (jämför med egenskap (c) från listan i avsnittet om delbarhet och notera att vi nu bara bryr oss om positiva tal). Men faktum är att det räcker att testa betydligt färre tal än så! Försök själv tänka ut en så effektiv metod som möjligt för att svara på frågorna nedan. Om du blir nyfiken på om du hittat den mest effektiva metoden så finns en beskrivning av hur man kan göra i slutet av hela häftet om talteori.

1. Hitta alla primtal mindre än 100. Hur många finns det?

2. Avgör om följande tal är primtal:

   (a) 91

   (b) 101

   (c) 143

   (d) 347

   (e) 12345

   (f) 387878

   (g) 1437004797

   (h) 3599

3. Talen $3, 5, 7$ är alla primtal. Händer det någonsin igen att tre tal på formen $n, n+2, n+4$ alla är primtal?

4. Hitta alla positiva tal n så att de tre talen $3n-4$, $4n-5$ och $5n-3$ alla är primtal.

5. Hitta det minsta tresiffriga primtalet där varje siffra är ett primtal.

6. Mellan 10 och 20 finns det 4 primtal. Händer det någonsin igen att fyra tal mellan två på varandra följande multiplar av 10 är primtal?

7. Hitta 100 på varandra följande positiva heltal som alla är sammansatta.

8. Bevisa att det finns oändligt många primtal.

9. Visa att om p och q är två på varandra följande udda primtal så är $p+q$ en produkt av minst tre primtal. (Till exempel så är $7+11=18=2\cdot 3\cdot 3$).

10. Bevisa att alla naturliga tal $n>1$ kan skrivas som en produkt av primtal på minst ett sätt.

11. Hitta det största tresiffriga primtalet.

12. Finns det ett konstant positivt heltal a så att n^4+a inte är ett primtal för något heltal n?

6.4 Största gemensamma delare och Euklides algoritm

Definition. Vi säger att två positiva heltal a och b har **största gemensamma delare** d om

1. $d \mid a$ och $d \mid b$
2. För varje c som delar både a och b så gäller också att $c \mid d$

Vi skriver $d = \mathrm{SGD}(a,b)$.

Till exempel har 18 och 12 största gemensamma delare 6, eftersom 12 och 18 har gemensamma positiva delare $1,2,3,6$, och alla dessa delar 6.

Notera att det inte är uppenbart att det alltid finns en största gemensamma delare till två givna tal a och b. Hur kan vi vara säkra på att det största talet i listan av gemensamma delare faktiskt uppfyller det andra kravet i definitionen? Detta är alltså något vi måste bevisa!

Ett sätt att bevisa detta, och samtidigt få ett effektivt sätt att räkna ut den största gemensamma delaren för två positiva heltal a och b, är med hjälp av **Euklides algoritm**, som i princip bara är att vi upprepar divisionsalgoritmen tills resten blir 0:

$$
\begin{aligned}
a &= k_1 b + r_1 & 1 &\le r_1 < b \\
b &= k_2 r_1 + r_2 & 1 &\le r_2 < r_1 \\
r_1 &= k_3 r_2 + r_3 & 1 &\le r_3 < r_2 \\
&\dots \\
r_{n-2} &= k_n r_{n-1} r_n & 1 &\le r_n < r_{n-1} \\
r_{n-1} &= k_{n+1} r_n + r_{n+1} = k_{n+1} r_n & r_{n+1} &= 0
\end{aligned}
$$

Eftersom $b > r_1 > r_2 > \dots$ så kommer processen garanterat ta slut, och ger då svaret

r_n ovan, alltså den sista positiva resten. Vi tar ett exempel, för talen 172 och 376:

$$\begin{aligned} 376 &= 2 \cdot 172 + 32 \\ 172 &= 5 \cdot 32 + 12 \\ 32 &= 2 \cdot 12 + 8 \\ 12 &= 1 \cdot 8 + 4 \\ 8 &= 2 \cdot 4 + 0 \end{aligned}$$

Svaret blev alltså 4, och det visar sig också att 4 är den största gemensamma delaren till 172 och 376. Detta är inte en slump!

Sats 6.1. Resultatet av Euklides algoritm på de positiva heltalen a och b är den största gemensamma delaren till a och b. Detta betyder också att största gemensamma delaren alltid existerar enligt vår definition ovan.

För att bevisa denna sats måste vi visa att resultatet av Euklides algoritm, alltså r_n, har både egenskap 1 och 2 i definitionen av största gemensamma delaren.

1. Från den sista likheten i Euklides algoritm får vi att $r_n \mid r_{n-1}$. Om vi använder det här på den näst sista likheten får vi att $r_n \mid r_{n-2}$ (jämför egenskap (d) i listan i avsnittet om delbarhet). Den tredje sista likheten ger $r_n \mid r_{n-3}$, eftersom vi redan vet att r_n delar både r_{n-1} och r_{n-2}. Fortsätter vi såhär får vi till sist att r_n delar a och b.

2. Om ett heltal c delar både a och b så delar det också r_1 enligt den första likheten i Euklides algoritm (jämför egenskap (d) i listan i avsnittet om delbarhet). När vi vet att $c \mid r_1$ och b kan vi med hjälp av andra likheten dra samma slutsats om r_2, och fortsätter vi såhär får vi till sist att $c \mid r_n$.

Då har vi visat att r_n uppfyller båda kraven i definitionen, så vi är klara. Notera också att r_n måste vara det största talet som delar både a och b, eftersom alla andra tal som delar a och b också delar r_n enligt villkor 2 i definitionen, och alltså måste vara mindre än r_n. Detta motiverar varför vi kallar det för största gemensamma delaren.

Euklides har faktiskt ännu mer att ge. Vi går tillbaka till exemplet ovan med 172 och 376. Den näst sista likheten säger att 4 är en **linjärkombination** av 8 och 12, alltså att det kan skrivas som $12x + 8y$ för några heltal x och y. Den tredje sista likheten säger vidare att 8 är en linjärkombination av 12 och 32, men då kan vi byta ut 8an i den första linjärkombinationen mot en linjärkombination av 12 och 32 så att även 4 är det. Vi får följande:

$$4 = 12 - 1 \cdot 8 = 12 - 1 \cdot (32 - 2 \cdot 12) = 3 \cdot 12 - 32$$

Men vi kan fortsätta såhär, och använda nästa likhet för att byta ut 12 mot en linjärkombination av 32 och 172 och till sist byta ut 32 mot en linjärkombination av 172 och 376. Då får vi:

$$\begin{aligned}4 = \ldots &= 3\cdot 12 - 32\\ &= 3\cdot(172-5\cdot 32)-32\\ &= 3\cdot 172 - 16\cdot 32\\ &= 3\cdot 172 - 16\cdot(376-2\cdot 172)\\ &= 35\cdot 172 - 16\cdot 376\end{aligned}$$

I allmänhet får vi att $SGD(a,b) = ax + by$ för några heltal x och y, något som är känt som **Bezouts identitet**.

Sats 6.2. Givet två positiva heltal a och b så existerar heltal x,y så att $SGD(a,b) = ax + by$.

Vissa tal har inga gemensamma delare alls, och det är något som kommer komma upp en hel del i talteori eftersom flera satser gäller specifikt för tal som har denna egenskap. Därför har vi gett det ett särskilt namn:

Definition. Vi säger att två tal som är har största gemensamma delare 1 är **relativt prima**.

1. Hitta den största gemensamma delaren till:

(a) 82 och 57

(b) 372 och 162

(c) 12345 och 54321

2. Skriv den största gemensamma delaren till följande tal som en linjärkombination av x och y:

(a) 82 och 57

(b) 372 och 162

(c) 12345 och 54321

3. Visa att n och $n+1$ är relativt prima.

4. Leo är skyldig Ludvig 1 krona efter ett vad, men han har bara 11-kronor att betala med (dock väldigt många sådana). Ludvig i sin tur har massor av 7-kronor. Hur kan Leo göra för att betala tillbaka Ludvig?

5. Jonas har en chokladkaka med $m \times n$ rutor som han ska dela upp i mindre bitar. I varje steg så bryter han av den största kvadraten som går att bryta av. Till slut är det en kvadrat kvar. Hur många rutor finns i den kvadraten?

6. (SMT 2015) Anna, Bertil och Cecilia ska koka varsitt ägg. De tre äggen ska läggas samtidigt i en kastrull med kokande vatten. Anna vill ha sitt ägg kokt i fem minuter, Bertil vill ha sitt kokt i sex minuter, och Cecilia vill ha sitt kokt i sju

minuter. Till sin hjälp har de endast tre timglas – ett fyraminuters, ett sjuminuters och ett tiominuters. Varje timglas kan vändas flera gånger. Hur ska de gå tillväga så att alla tre blir nöjda?

7. (IMO 1959) Visa att $21n+4$ och $14n+3$ är relativt prima, oavsett vad n är.

8. (a) Bestäm $SGD(n!+1,(n+1)!+1)$.

(b) Visa att $SGD(n^x-1,n^y-1)=n^{SGD(x,y)}-1$.

9. Är det sant att $SGD(a,b)\cdot SGD(c,d)=SGD(ac,bd)$ för alla positiva heltal a,b,c,d?

10. Visa att på varandra följande Fibonaccital alltid är relativt prima.

11. Visa att om ett primtal p delar ab så delar p antingen a eller b. (Ledtråd: anta att $p\nmid a$ och använd Bezouts identitet för att visa att $p\mid b$)

12. Varför behöver vi att p är ett primtal i föregående uppgift? Hitta ett motexempel om p inte är ett primtal.

13. Visa att för positiva heltal a,b,c så har ekvationen $ax+by=c$ heltalslösningar om och endast om $SGD(a,b)\mid c$.

14. I denna uppgift ska du bevisa Bezouts identitet på ett annat sätt. Betrakta alla positiva tal på formen $ax+by$, och låt d vara det *minsta* sådana talet. Vi vill visa att $d=SGD(a,b)$.

(a) Visa att om $c\mid a$ och $c\mid b$ så gäller också att $c\mid d$ (egenskap 2 i definitionen av största gemensamma delare).

(b) Antag att d inte delar a och använd divisionsalgoritmen för att hitta ett tal mindre än d som också är på formen $ax+by$. Varför är detta tillräckligt för att bevisa att d faktiskt måste dela både a och b (egenskap 1 i definitionen av största gemensamma delare)?

15. Visa att om a och b är relativt prima så är $ab-a-b$ det största talet som inte kan skrivas på formen $ax+by$ för heltal $x,y\geq 0$. Hur många positiva tal finns det som inte kan skrivas på denna form?

16. Hitta en aritmetisk talföljd av längd 100 så att alla par av tal i följden är relativt prima.

17. Visa att $111\ldots1$ har minst n stycken distinkta primtalsdelare, om antalet ettor är 2^n.

18. Två distinkta positiva heltal a och b står skrivna på tavlan. Vi byter upprepat ut det mindre av dem mot talet $\dfrac{ab}{|a-b|}$. Visa att förr eller senare står två lika tal på tavlan.

19. (Baltic Way 2016) Betrakta trianglar i planet, vilkas hörn har heltalskoordinater. En sådan triangel kan lagligt transformeras genom att förskjuta ett hörn parallellt med motstående sida till en ny punkt med heltalskoordinater. Visa, att om två trianglar har samma area, kan den ena fås att sammanfalla med den andra genom en sekvens av lagliga transformationer.

6.5 Aritmetikens fundamentalsats

Nu är vi redo att bevisa aritmetikens fundamentalsats, som säger att varje positivt heltal kan skrivas som en produkt av primtal på ett *unikt* sätt (upp till ordningen som vi multiplicerar i). Notera först att vi kan skriva alla tal n som en produkt av primtal på minst ett sätt (jämför med uppgiften från avsnittet om primtal):

För $n = 2$ är vi klara direkt, eftersom det redan är ett primtal. Antag av vi redan kan skriva alla tal $2, 3, ..., n-1$ som produkter av primtal. Om $n > 2$ har vi två möjligheter: antingen är det redan ett primtal och då är vi klara direkt, eller så finns det två tal $1 < a, b < n$ så att $n = ab$. Men vi har redan skrivit a och b som produkter av primtal eftersom de finns med i listan $2, 3, ..., n-1$, så då kan vi även skriva n som en produkt av primtal, och såhär kan vi fortsätta för alla tal. Alltså är vi klara med beviset av att det finns minst ett sätt att skriva varje positivt heltal n som en produkt av primtal. Tekniken vi just använde kallas för induktion, och det var samma teknik som vi använde för att bevisa divisionsalgoritmen.

För att visa att n kan skrivas som en produkt av primtal på ett unikt sätt så behöver vi använda en av uppgifterna från förra avsnittet, nämligen att om ett primtal p delar ab så delar p antingen a eller b. Det kan vi visa genom att anta att $p \nmid a$, och notera att enligt Bezout så är $1 = SGD(a, p) = ax + py$ för några heltal x, y. Om vi nu multiplicerar det med b får vi $b = (ab)x + pby$, men eftersom $p \mid ab$ så ger detta att $p \mid b$.

Antag slutligen att n kan skrivas som en produkt av primtal på två sätt, säg

$$n = p_1 p_2 ... p_k = q_1 q_2 ... q_m$$

där p_i och q_i alla är primtal. Enligt beviset i föregående stycke så måste p_1 dela minst ett av talen $q_1, q_2, ..., q_m$, och eftersom de alla är primtal måste vi i så fall ha att $p_1 = q_i$. Eftersom omordning av talen kan vi få att $p_1 = q_1$, men då kan vi dela bort dessa tal så att $p_2 ... p_k = q_2 ... q_m < n$. Så om vi redan visat att talen $2, 3, ..., n-1$ kan skrivas som en produkt av primtal på ett unikt sätt, så måste detta också gälla $p_2 ... p_k = q_2 ... q_m$, och alltså även n när vi multiplicerar tillbaka $p_1 = q_1$. Men då är vi klara!

Sats 6.3. Alla positiva heltal $n > 1$ kan skrivas som en produkt av primtal på ett unikt sätt, upp till ordningen på talen.

Detta ger en del av svaret på en av frågorna från introduktionen. Vi noterade redan i avsnittet om primtal att om vi vill hitta en mängd av tal som genererar alla positiva heltal med bara multiplikation så måste alla primtal vara med, eftersom de inte kan skrivas som en produkt av positiva heltal på något annat sätt. Nu vet vi också att det räcker med dessa tal, och mer därtill: varje tal kan skrivas som en produkt av primtal på ett unikt sätt!

Vi brukar kalla produkten av primtal som ger ett särskilt tal för dess **primtalsfaktorisering**. Ett bra sätt att hitta ett tals primtalsfaktorisering är att leta efter små primtalsdelare, och sen dividera bort de delare vi hittar tills vi bara har 1 kvar. För att hålla koll på vilka primtal man har kan man skriva dem i ett träd, såhär:

Med aritmetikens fundamentalsats till hands ser vi vissa saker som vi pratat om tidigare i nytt ljus.

Delare: Betrakta talet $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$. Vi får alla delare till detta tal på formen $2^a \cdot 3^b \cdot 5^c$. Hur funkar detta i allmänhet?

Största gemensamma delare: Betrakta talen $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$ och $525 = 3 \cdot 5^2 \cdot 7$. Deras största gemensamma delare är $3 \cdot 5 = 15$.

Vi kan också definiera minsta gemensamma multipeln av två positiva heltal:

Definition. Givet två positiva heltal a och b så är deras **minsta gemensamma multipel** det minsta heltal d som delas av både a och b. Vi skriver $d = MGM(a,b)$.

Betrakta talen $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$ och $525 = 3 \cdot 5^2 \cdot 7$. Deras minsta gemensamma multipel är $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 = 12600$.

Vi kan också definiera största gemensamma delaren och minsta gemensamma multipeln av fler tal än 2. Det definieras precis som det låter!

När man provat primtalsfaktorisera många olika tal kan det kännas ganska uppenbart att det finns en primtalsfaktorisering och att den är unik. Men det är egentligen inte alls särskilt uppenbart! Betrakta till exempel alla tal på formen $a + \sqrt{3}bi$, där a och b är heltal och i är den imaginära enheten med egenskapen att $i^2 = -1$. Dessa tal kan multipliceras och adderas, så vi kan definiera delbarhet och primtal på samma sätt som vi gjorde för heltalen. Men för dessa talen visar det sig att det inte finns någon unik primtalsfaktorisering längre! Till exempel så är $4 = 2 \cdot 2 = (1 + \sqrt{3}i)(1 - \sqrt{3}i)$, trots att både 2 och $1 \pm \sqrt{3}i$ är som primtal i bemärkelsen att de inte kan skrivas som en produkt av några andra tal på den formen. (Om ni läser om ringar kommer ni dock märka att tal med egenskapen att vi inte kan dela upp dem i mindre delar snarare brukar kallas för irreducibla, medan primtal istället definieras som tal med egenskapen att $p \mid ab \Rightarrow p \mid a$ eller $p \mid b$.)

1. Skriv följande tal som en produkt av primtal:
(a) 60 **(b)** 91 **(c)** 2020 **(d)** 3267 **(e)** 1001

2. Hur många delare har följande tal?
(a) 5 **(b)** 5^2 **(c)** 5^3 **(d)** 101^2 **(e)** 101^5 **(f)** $5^2 \cdot 101^5$

3. Vad är siffersumman i talet $2^{2020} \cdot 5^{2021}$?

4. Vilket är det minsta talet n så att $n!$ är delbart med 10^8?

5. Vilket är det minsta talet som delas av 2020 som också är på formen $x^y y^x$ för några heltal $x > 1$ och $y > 1$?

6. Vilket är det minsta positiva heltalet x sådant att talet $840 \cdot x$ är en kvadrat?

7. Hur många kvadrater finns det i mängden $\{1^1, 2^2, 3^3, \ldots, 2020^{2020}\}$?

8. Vad måste gälla för primtalsfaktoriseringen av ett tal om det är en kvadrat? Vad måste gälla om det är en potens av tre? Om det är en potens av n?

9. Visa att $ab = SGD(a,b)MGM(a,b)$.

10. Hur många delare har talet $101^4 \cdot 103^2 \cdot 107^9 \cdot 109$? (Det är givet att 101, 103, 107 och 109 alla är primtal).

11. Bestäm produkten av alla positiva delare till 720^8. Kan du hitta en enkel formel för produkten av alla positiva delare till n, givet att n har exakt d positiva delare?

12. Bestäm antalet ordnade par av positiva heltal (a,b) så att $MGM(a,b) = 420$.

13. Vad är summan av alla positiva delare till talet 720^8?

14. Låt a och b vara positiva heltal så att $MGM(a,b) + SGD(a,b) = a + b$. Visa att ett av talen delar det andra.

15. Hur många olika primtalsdelare har talet $2^{16} - 1$?

16. Hitta alla positiva heltal n så att $9^n - 1 = 2^{n+2}$.

17. Primtalsfaktorisera 27000001. (Svårt! Det är givet att talet har exakt 4 primtalsfaktorer.)

18. Faktorisera $19! + 23!$. (Svårt!)

7. Talteori - gröna gruppen

7.1 Introduktion

Talteori handlar om heltalens egenskaper. Därför börjar vi med att se till så att vi vet vad vi menar med heltalen.

De naturliga talen är precis talen $1, 2, 3, \ldots$, och vi brukar beteckna denna mängd av tal med $\mathbb{N}$. Ni känner alla till att vi kan addera naturliga tal, till exempel är $4 + 5 = 9$. Vi kan också multiplicera tal, genom att addera ett tal till sig självt flera gånger: $4 \cdot 3 = 4 + 4 + 4 = 12$.

Om vi också lägger till negativa tal och 0 så får vi heltalen: $\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$, en mängd av tal som vi brukar beteckna med $\mathbb{Z}$. Med dessa tal till hands så kan vi alltid hitta en additiv invers till varje tal, alltså att det för varje tal x finns ett tal $-x$ så att $x + (-x) = 0$. Det gör också att vi alltid kan subtrahera tal: för vilka heltal x, y som helst så kan vi få ett nytt heltal som skillnaden $x - y$ (notera att detta faktiskt inte var möjligt så länge vi bara kände till de naturliga talen, försök till exempel ta 4 minus 7 - det går inte!)

Hur heltalen beter sig när vi bara adderar och subtraherar dem är väldigt enkelt att förstå, för den som är intressad och har hört talas om gruppteori så är heltalen vad man kallar för en cyklisk grupp under addition, där alla element kan genereras av bara talet 1. Däremot är det inte alls lika uppenbart hur $\mathbb{Z}$ beter sig när vi multiplicerar tal!

Till att börja med så är ju subtraktion som en form av baklängesaddition: om vi vet att $x + 3 = 7$ så tar vi reda på vad x är genom att subtrahera 3 från 7, och får $x = 7 - 3 = 4$. Finns det på samma sätt någon form av baklängesmultiplikation? De flesta av er vet säkert att baklängesmultiplikation är det vi kallar för division. Om vi till exempel vill hitta ett x så att $3x = 12$ så dividerar vi 12 med 3 och får $x = \frac{12}{3} = 4$. Men vad händer om vi istället vill hitta x så att $4x = 15$? Här uppstår genast problem - det finns inget sådant heltal x! Så det verkar som att vi kan dividera tal ibland, medan vi ibland inte kan göra det.

En annan observation vi kan göra är att vi kunde få alla tal genom att addera och subtrahera 1 till och från sig själv. Finns det något motsvarande tal för multiplikation? Först och främst blir frågan lite orättvis om vi får använda subtraktion i det första fallet, eftersom vi redan konstaterat att det inte finns någon motsvarande baklängesmultiplikation i det andra fallet. Men notera att vi faktiskt till och med kan få alla naturliga tal genom att bara lägga till 1 till sig själv, medan vi definitivt inte finns något tal motsvarande 1 för multiplikation. En naturlig fråga att ställa sig blir hur många och vilka tal vi egentilgen behöver för att få alla tal genom bara multiplikation?

Dessa och många andra frågor kommer vi försöka svara på eller i alla fall förstå bättre under kommande lektioner. Att ta reda på mer om hur heltalen beter sig under multiplikation är faktiskt en stor del av vad den elementära talteorin handlar om.

7.2 Delbarhet

Som vi noterade tidigare så kan vi ibland dividera tal, eller göra baklängesmultiplikation. När detta går säger vi att ett tal är delbart med ett annat tal. Vi har följande definition:

Definition. Vi säger att ett heltal b är **delbart** med ett heltal a om det existerar ett heltal k så att $ak = b$, och skriver $a \mid b$. Man kan även säga att a **delar** b, att b är en **multipel** av a eller att a är en **delare** till b.

Till exempel så är 30 delbart med 5, eftersom $30 = 6 \cdot 5$. Det motsvarar $b = 30$, $a = 5$ och $k = 6$ i definitionen.

1. Avgör om

   (a) 21 är delbart med 7

   (b) 15 är delbart med 4

   (c) 10 är en delare till 2

   (d) 7 är en delare till 0

2. Vilka heltal n har 0 som delare?

3. Skriv ner alla delare till:

   (a) 30

   (b) 19

   (c) 91

   (d) 36

Hur många positiva delare har varje tal? Är antalet delare jämnt eller udda?

4. I en galax långt långt borta finns det bara mynt av 2 valörer: 15 och 21. Visa att för oavsett hur många sådana mynt du har av varje valör så kommer din förmögenhet vara delbar med 3.

5. Hitta det minsta talet med 8 olika positiva delare.

6. Karin väljer fem tal ur mängden $\{1,2,3,4,5,6,7\}$ och berättar för Sebastian vad deras produkt är. Det visar sig att det inte är tillräckligt med information för att avgöra om summan av talen är jämn eller udda. Vad är produkten av talen?

7. Visa att antalet positiva delare till ett positivt heltal n är max $2\sqrt{n}$. (Roten ur n, skrivet $\sqrt{n}$, är ett positivt tal med egenskapen att $\sqrt{n}^2 = n$).

8. Visa att ett positivt heltal har ett udda antal positiva delare om och endast om det är en kvadrat.

9. Visa att n^2 är en multipel av 2 om och endast om n är en multipel av 2. Är samma sak sant för 3? Vad om 4? (Du får inte använda aritmetikens fundamentalsats, alltså att varje tal är en produkt av primtal på ett unikt sätt, även om du vet det sen innan!)

10. Låt summan av de positiva delarna till n betecknas med $\sigma(n)$. Visa att $\sigma(1) + \sigma(2) + \ldots + \sigma(n) \leq n^2$.

11. (IMO 2002) De positiva delarna till n är $1 = d_1 < d_2 < \ldots < d_k = n$. Visa att $d_1d_2 + d_2d_3 + \ldots + d_{k-1}d_k < n^2$.

7.3 Primtal

I uppgifterna till förra avsnittet upptäckte vi att vissa tal har många delare medan andra har få. Till exempel har 36 ganska många positiva delare, hela 9 stycken, medan 19 bara delas av 1 och sig självt. Tal som bara delas av ett och sig självt är speciella, eftersom de garanterat inte kan byggas upp som en produkt av andra positiva heltal. För att återvända till frågan från introduktionen så vet vi att alla dessa tal måste finnas med om vi ska välja en mängd av tal som kan generera alla naturliga tal genom bara multiplikation. Vi kallar dem för primtal.

Definition. Vi säger att ett heltal $p > 1$ är ett **primtal** om det bara delas av 1 och sig självt. Vi säger att ett heltal $n > 1$ är **sammansatt** om det inte är ett primtal, alltså om $n = ab$ för två heltal a och b som båda är större än 1.

Ett sätt att kolla om ett tal är ett primtal är att helt enkelt prova dividera talet med alla möjliga tal som är mindre. Orsaken att det funkar är att om a och b är positiva tal, och $a \mid b$, så måste också $a \leq b$, eftersom det existerar ett heltal k så att $b = ak > a$ (jämför med egenskap (c) från listan i avsnittet om delbarhet och notera att vi nu bara bryr oss om positiva tal). Men faktum är att det räcker att testa betydligt färre tal än så! Försök själv tänka ut en så effektiv metod som möjligt för att svara på frågorna nedan. Om du blir nyfiken på om du hittat den mest effektiva metoden så finns en beskrivning av hur man kan göra i slutet av hela häftet om talteori.

1. Hitta alla primtal mindre än 100. Hur många finns det?

2. Avgör om följande tal är primtal:

(a) 91

(b) 101

(c) 143

(d) 347

(e) 12345

(f) 387878

(g) 1437004797

(h) 3599

3. Talen $3, 5, 7$ är alla primtal. Händer det någonsin igen att tre tal på formen $n, n+2, n+4$ alla är primtal?

4. Hitta alla positiva tal n så att de tre talen $3n-4$, $4n-5$ och $5n-3$ alla är primtal.

5. Hitta det minsta tresiffriga primtalet där varje siffra är ett primtal.

6. Mellan 10 och 20 finns det 4 primtal. Händer det någonsin igen att fyra tal mellan två på varandra följande multiplar av 10 är primtal?

7. Hitta 100 på varandra följande positiva heltal som alla är sammansatta.

8. Bevisa att det finns oändligt många primtal.

9. Visa att om p och q är två på varandra följande udda primtal så är $p+q$ en produkt av minst tre primtal. (Till exempel så är $7+11 = 18 = 2 \cdot 3 \cdot 3$).

10. Bevisa att alla naturliga tal $n > 1$ kan skrivas som en produkt av primtal på minst ett sätt.

11. Hitta det största tresiffriga primtalet.

12. Finns det ett konstant positivt heltal a så att $n^4 + a$ inte är ett primtal för något heltal n?

7.4 Aritmetikens fundamentalsats

1. Skriv följande tal som en produkt av primtal

(a) 60

(b) 105

(c) 2020

(d) 3267

(e) 1001

2. Är $2^4 \cdot 5^6$ delbart med 10? Vad är siffersumman av talet $2^4 \cdot 5^6$?

3. Vidar har 30 päron och Nike har 42 äpplen. De ska göra så många högar som möjligt så att varje hög innehåller lika många äpplen och lika många päron. Hur många högar kan de göra?

4. Det finns två kartongrektanglar med storlekarna 49×51 rutor och 99×101 rutor. Alla de delades upp i likadana rektanglar med heltalssidor. Rektanglarna var inte kvadrater. Bestäm storleken på rektanglarna.

5. Vilket är det minsta talet n så att $n!$ är delbart med 100?

6. Skriv $\frac{7}{52} + \frac{25}{91}$ som ett bråk med gemensam nämnare.

7. Vilket är det minsta positiva heltalet x sådant att talet $840 \cdot x$ är en kvadrat?

8. Hur många kvadrater finns det i mängden $\{1^1, 2^2, 3^3, \ldots, 2020^{2020}\}$?

9. Förklara varför primtalsfaktoriseringen av en kvadrat bara kan ha exponenter som är jämna. Kan du komma på ett liknande villkor för kuber eller n-te potenser?

10. Vilket är det minsta talet som delas av 2020 som också är på formen $x^y y^x$ för några heltal x och y?

11. Bestäm alla positiva heltal n sådana att $1! + 2! + 3! + \cdots + n!$ är ett kvadrattal.

12. Hur många olika primtalsdelare har talet $2^{16} - 1$?

13. Hitta alla positiva heltal n så att $9^n = 2^{n+2} + 1$.

14. Primtalsfaktorisera $19 \cdot 17! + 20!$

15. Hitta alla positiva heltalslösningar till $m^n = n^m$.

16. Försök hitta en enkel formel för antalet positiva delare till ett tal, givet primtalsfaktoriseringen.

7.5 Största gemensamma delare, minsta gemensamma multipel och blandade talteoriproblem

1. Vilken är den största gemensamma delaren till talen $17 \cdot 101^2$ och $59 \cdot 101$?

2. Hitta den största gemensamma delaren och den minsta gemensamma multipeln till 60 och 105.

3. Skriv $\dfrac{7}{60} + \dfrac{19}{105}$ som ett bråk. (Försök använda ditt svar från förra uppgiften).

4. Hur många delare har följande tal?
(a) 5 **(b)** 5^2 **(c)** 5^3 **(d)** 101^2 **(e)** 101^5 **(f)** $5^2 \cdot 101^5$

5. Matteläraren skrev en uträkning på tavlan. Men precis innan lektionen skulle börja, så busade någon utav eleverna och bytte ut två siffror mot nya. Därefter stod det:

$$4 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 4 = 2247$$

Men vilka var siffrorna från början? Bevisa att ert svar är det enda möjliga.

6. Vilket tal har flest delare, 1001 eller 30?

7. Hur många delare har talet $101^4 \cdot 103^2 \cdot 107^9 \cdot 109$? (Det är givet att 101, 103, 107 och 109 alla är primtal).

8. I en liksidig triangel är varje vinkel $60°$, i en kvadrat är varje vinkel $90°$ och i en regelbunden femhörning är varje vinkel $108°$. För vilka n gäller att vinklarna i en regelbunden n-hörning är ett helt antal grader?

9. Visa att produkten av två tal är lika med produkten av deras största gemensamma delare och deras minsta gemensamma multipel.

10. Bestäm produkten av alla positiva delare till 720^8. Kan du hitta en enkel formel för produkten av alla positiva delare till n, givet att n har exakt d positiva delare?

11. Vad är x lika med?

$$\frac{2}{73} = \frac{1}{60} + \frac{1}{219} + \frac{1}{292} + \frac{1}{x}$$

8. Invarianter

8.1 Invarianter

Vissa problem kan bli mycket enklare om man hittar något som inte förändras, trots att andra saker förändras enligt vissa regler. Det kallas för en invariant. För att förklara idén lite bättre så tar vi ett exempel.

Exempel: På tavlan står alla tal mellan 1 och 10 skrivna. Vilgot får välja två tal a, b åt gången och byta ut dem mot deras differens $a - b$ tills det bara finns ett tal kvar. Kan Vilgot sluta med ett jämnt tal?

Lösning: Vi kollar på summan av alla tal på tavlan. I varje steg så kommer summan av $a + b$ ersättas med $a - b$, alltså ändras den totala summan med det jämna talet $2b$. Från början så var summan $1 + 2 + \ldots + 10 = 55$, vilket är udda. Eftersom vi bara kan ändra detta med något jämnt så kommer summan fortsätta vara udda, och alltså kan Vilgot inte ha ett jämnt tal i slutet.

I det här exemplet så var det *pariteten* av den totala summan som var vår invariant, alltså huruvida summan är jämn eller udda. Pariteten var samma hela tiden, trots att de exakta talen förändrades och trots att vi kan välja massor av olika sätt ta differensen på. Just paritet visar sig ofta vara en bra sak att kolla på, men beroende på vilket sammanhang det är så kan helt olika saker visa sig vara invarianter. Gemensamt är bara att de ska vara oförändrade när vi förändrar något som är tillåtet att förändra enligt uppgiften. På så sätt behöver vi inte analysera exakt vad som händer under förändringen och i vilken ordning, utan kan dra slutsatser om hur det måste se ut i slutet i direkt.

En sak som är bra att notera är att vi oftast inte kan avgöra *exakt* hur det kommer se ut i slutet bara för att vi hittat en invariant. Däremot kan vi ofta utesluta många möjligheter.

Här kommer några problem som alla på ett eller annat sätt blir enklare om man hittar en lämplig invariant!

1. På tavlan står talen $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$. I ett drag tar man två tal och ersätter dem med sin summa. Kan man få talet 30 på tavlan någon gång?

2. Ett schackbräde är färgat som vanligt, med varannan ruta svart och varannan vit. I ett drag får man byta färg på alla rutor i en 2×2 ruta eller på alla rutor i en rad eller kolumn. Går det att byta färg på några rutor med dessa drag så att exakt en ruta är svart i slutet?

3. Du har precis träffat en drake med 100 huvuden, och den är arg! Med ett slag kan du hugga av antingen 5, 12, 17 eller 20 av huvudena, men då växer 17, 24, 2 respektive 17 nya ut. Om draken förlorar alla huvuden växer inga nya ut, den förlorar, och du blir en hjälte! Kan du besegra draken?

4. Det finns kameleonter med tre olika färger: 13 röda, 15 gröna och 17 blå. Om två med olika färg träffas byter de omedelbart båda färg till den tredje färgen.

(a) Kan det hända att alla får samma färg?

(b) Kan det hända att det blir lika många av varje färg?

5. På en kub står ett tal i varje hörn. Från början är det en nolla i sju av hörnen, och en etta i ett av hörnen. I varje drag kan vi välja två hörn längs samma kant, och öka talen i båda hörnen med 1.

(a) Kan vi få talen i alla hörn att blir jämna samtidigt?

(b) Kan vi få talen i alla hörn att bli delbara med 3 samtidigt?

(c) Kan vi få talen i alla hörn att bli delbara med n samtidigt, för något n?

6. Från början har vi talen $(2, 8, 10)$. Vi kan när som helst välja två tal a, b och byta ut dem mot $\frac{a+3b}{2}$ och $\frac{a-b}{2}$. Kan vi få talen $(6, 7, 8)$?

7. En cirkel är uppdelad i 6 sektorer. På sektorerna står talen $1, 0, 1, 0, 0, 0$ i den ordningen. Kan man genom att öka två intilliggande sektorer med 1 upprepade gånger få samma tal i alla sektorer?

8. På ett schackbräde med 8×8 rutor är två diagonalt motstående hörn borttagna. Går det att täcka resten av brädet med dominobrickor av storlek 1×2, om inga brickor får sticka utanför brädet och inga brickor får överlappa?

9. En cirkel är indelad i n sektorer, och i varje sektor ligger en sten. I ett drag får du välja två stenar, vilka som helst, och flytta stenarna i olika riktning. För vilka n kan du se till att alla stenar hamnar i samma sektor?

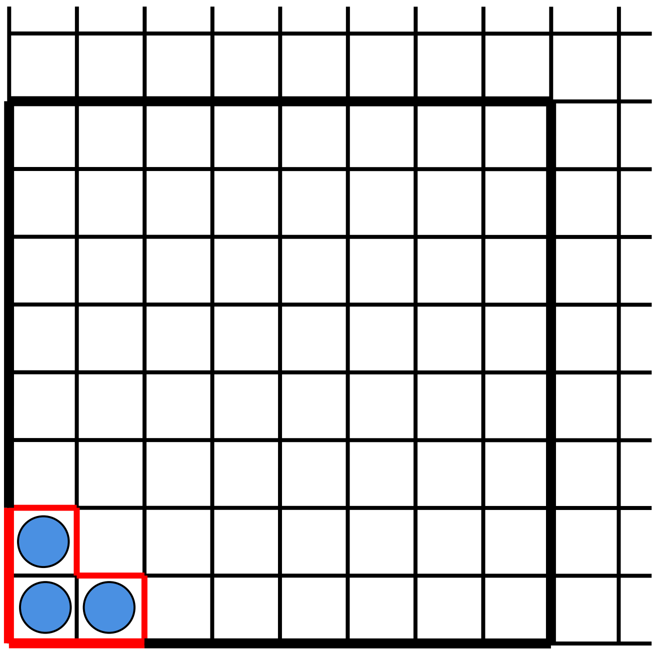
10. Du har fått några stavar med längder $1, 2, 3, \ldots, 7$, tillsammans med en särskild manick som kan slå ihop två stavar till en längre stav på ett väldigt speciellt sätt. Närmare bestämt så kan du välja två stavar, placera dem så att de blir som två kateter (de korta sidorna) i en rätvinklig triangel och sen trycka på knappen för att slå ihop dem till en enda stav med samma längd som hypotenusan (den långa sidan) i den rätvinkliga triangeln som bildades. Du har bestämt dig för att slå ihop stavarna så att du bara har en lång stav kvar. Hur lång kan den bli som längst?

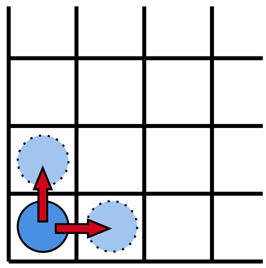
11. På tavlan står talen $1, 2, 3, \ldots, 1000$. Vi byter upprepat ut ett tal mot sin siffersumma, tills att alla tal är ensiffriga. Vilket tal finns det flest av, när man är klar?

12. I rutnätet nedan får man upprepat byta tecken på alla siffror i en rad eller en kolumn. Går det att göra alla tal positiva samtidigt? Vad händer om du också får byta tecken på alla tal längs en diagonal, där vi räknar alla sneda linjer som diagonaler?

1	-1	1	1
1	1	1	1
1	1	1	1
1	1	1	1

13. Givet är ett oändligt rutnät med tre stenar i de tre nedersta rutorna som på bilden. I ett drag så kan man välja en sten, och byta ut den mot två nya stenar i rutan ovanför och rutan till höger om den ursprungliga. Går det att genom att upprepat göra detta drag täcka hela 8×8-rutnätet nere i vänster hörn med stenar?





14. (IMO 2011 - mycket svårt!) Vi har en ändlig mängd punkter S i planet, minst två stycken. Anta att inga tre av dessa punkter ligger på samma linje. Vi säger att en väderkvarn är en process som börjar med en linje som går genom en enda av punkterna $P \in S$. Linjen roterar sedan medurs runt P tills den för första gången stöter på ytterligare en punkt från S. Denna punkt, Q, tar då över som rotationscentrum och linjen roterar nu medurs runt Q, tills den för första gången stöter på en annan punkt ur S. Processen fortsätter så i all oändlighet. Visa att man kan välja en punkt $P \in S$ och en linje genom P, så att varje punkt ur S används oändligt många gånger som rotationscentrum av den resulterande väderkvarnen.

8.2 Semi-invarianter

Ibland när vi förändrar något enligt vissa regler kan vi inte hitta en invariant, men vi kan hitta något som bara ändras på ett håll. Det kallas för en **semi-invariant**. I så fall kan vi också, precis som för invarianterna, säga något om slutkonfigurationen utan att i detalj analysera vad som händer i varje steg. Vi tar ett exempel.

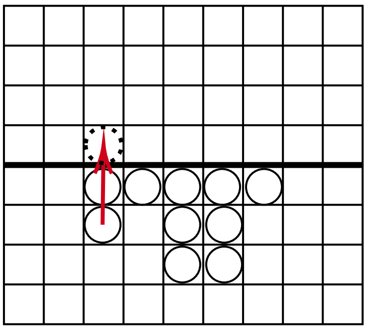
Exempel: På en tavla står 50 tal mellan 1 och 100. Vi kan i ett steg byta ut två tal a och b mot talen $\frac{a+b}{2}$ och $\sqrt{ab}$. Efter att ha gjort detta massor av gånger räknar vi ut skillnaden mellan största och minsta talet som står på tavlan. Visa att skillnaden inte kan blir större än 99.

Lösning: Om vi till exempel tar talen 18 och 50 så kommer vi ersätta dem med talen $\frac{18+50}{2} = \frac{68}{2} = 34$ och $\sqrt{18 \cdot 50} = \sqrt{900} = 30$. Både 30 och 34 ligger mellan 18 och 50, så i detta fall kommer största talet i alla fall inte öka, och minsta talet inte minska. Detta gäller i allmänhet: både $\frac{a+b}{2}$ och $\sqrt{ab}$ ligger mellan a och b, så de nya talen vi skriver upp kommer ligga mellan talen vi suddade ut. Alltså kommer det största talet inte öka och det minsta talet inte minska. Vi har hittat en semi-invariant (största respektive minsta talet kan bara ändras åt ett håll). Vi drar slutsatsen att skillnaden inte kan öka, och eftersom talen från början var mellan 1 och 100 så kan skillnaden aldrig bli större än $100 - 1 = 99$.

Nedan finns först ett av John Conway's kända problem, Conway's soldiers, som man kan lösa med hjälp av att hitta just en semi-invariant. Det är ett svårt problem som involverar en hel del algebra, men vi har delat upp det delsteg som ni själva får klura på och så går vi igenom tillsammans efter hand under lektionen. Efter det följer ett avsnitt med några blandade (och svåra) problem om invarianter och semi-invarianter som vi nog inte hinner tänka på under lektionen, men som kan vara kul att tänka på senare om man vill.

Conway's soldiers

På ett oändligt rutnät finns en lång rät linje dragen. Under linjen får vi i början placera så många stenar vi vill, men högst en sten per ruta. Därefter får vi lov att ta en sten och hoppa över en intilliggande sten, om rutan vi hoppar till är tom. Stenen vi hoppade över tas då bort från planen. Målet är att med ett ändligt antal drag komma så långt ovanför linjen som möjligt.



1. Hur kan vi göra för att komma minst ett steg ovanför linjen?
2. Hur kan vi göra för att komma minst två steg ovanför linjen?
3. Hur kan vi göra för att komma minst tre steg ovanför linjen?
4. Hur kan vi göra för att komma minst fyra steg ovanför linjen?

5. Det är faktiskt omöjligt att komma fem steg ovanför linjen med ett ändligt antal drag. I den här uppgiften får du bevisa detta. För att göra det kommer vi betrakta en målruta som ligger på femte raden ovanför linjen, och ge den vikten $x^0 = 1$. En ruta som är n steg ifrån den får vikten x^n.

(a) Visa att i ett hopp så kommer den totala vikten av alla rutor med stenar i ändras med ett tal på formen $(x^2 - x - 1)x^n$, $-x^n$ eller $(1 - x - x^2)x^n$, för något n.

(b) Bestäm vilka värden på x som gör så att den totala vikten av alla rutor med stenar i aldrig ökar.

(c) Visa att om $0 < x < 1$ och $x^2 - x - 1 = 0$, så är

$$x^2 + x^3 + x^4 + \ldots = \sum_{n=2}^{\infty} x^n = 1$$

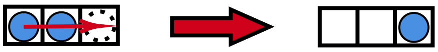
(d) Välj ett lämpligt värde för x från deluppgift (b) och bestäm vad summan blir av alla tal på raden precis under målraden, alltså den fjärde raden ovanför linjen.

(e) Vad blir summan av alla tal på raden som är k steg under målraden?

(f) Visa att vi aldrig kan nå femte raden med ett ändligt antal stenar!

Några fina (och svåra!) bonusproblem om invarianter och semi-invarianter

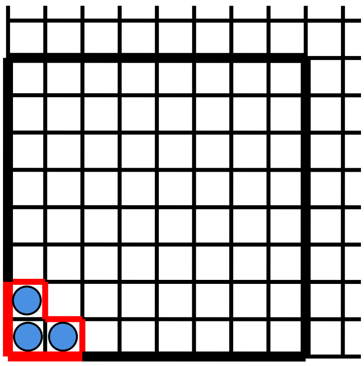
1. (Baltic Way 2017) 15 stenar är placerade på ett 4×4-bräde, med högst en sten per ruta. I ett drag kan man låta en sten hoppa över en intilliggande sten, om rutan på andra sidan är tom. Den överhoppade stenen tas i så fall bort, som på bilden nedan. För vilka startpositioner för den tomma rutan är det möjligt att nå en position med bara en sten kvar på brädet?

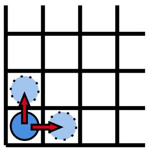


2. Givet är ett oändligt rutnät med tre stenar i de tre nedersta rutorna som på bilden. I ett drag så kan man välja en sten, och byta ut den mot två nya stenar i rutan ovanför och rutan till höger om den ursprungliga.

(a) Går det att genom att upprepat göra detta drag täcka hela 8×8-rutnätet nere i vänster hörn med stenar?

(b) Nu börjar vi istället med 4 stenar i rutan längst ner till vänster. Kan man göra ett ändligt antal drag som beskrivet ovan, så att det ligger max 1 sten per ruta?





3. Ett antal spelkort ligger på en rad. Vi kan vända på k intilliggande om det längst till vänster är uppvänt. Visa att vi inte kan fortsätta vända kort för evigt.

4. En klass ska delas in i två grupper. Varje elev har som mest 3 ovänner i klassen. Visa att det går att göra indelningen så att ingen elev får mer än 1 ovän i sin grupp.

5. Våren 2020 uppstod ett nytt virus som nu sprids som en löpeld! Borgmästaren på rutnäset har därför instruerat alla att stanna hemma i sina hus hela tiden. Tyvärr har det visat sig att om man är granne med minst två personer som har blivit smittade så blir man ändå sjuk. Nu vill borgmästaren veta hur många som kan bli sjuka i värsta fall, så att det går att anpassa sjukhusens kapacitet utan att det kostar alldeles för mycket.

På rutnäset ligger alla hus i ett perfekt kvadratiskt rutnät med 10×10 rutor. Två hus räknas som grannar om deras rutor delar en sida. Borgmästaren vet att det finns exakt k smittade personer på rutnäset, men har ingen aning om var de bor. Hur många kan komma att bli smittade i värsta fall, om viruset får härja fritt under jättelång tid?

9. Mattespel

9.1 Landskap

Mål

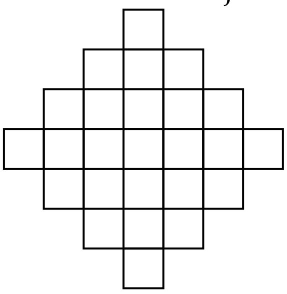
I Landskap ska lagen lösa matteuppgifter för att tävla om att skapa det största landskapet.

Regler

När spelet börjar får varje lag ett papper som innehåller alla uppgifter. När ett lag känner att de har löst en uppgift får de lämna in ett papper till rättaren, där det tydligt står: Lagnamn, Numret på uppgiften och Svaret. Om svaret var korrekt så får de måla en tom bricka på kartan i sin lagfärg. Om svaret var fel så får de inte försöka igen på den uppgiften. Ett lag kan dessutom spara ihop två lösta uppgifter för att erövra en ruta som tillhör ett annat lag.

Kartan och landskap

Kartan ser från början ut så här och består endast tomma brickor.



Ett landskap är en grupp brickor som tillhör samma lag och som dessutom är sammanhängande. Två brickor sitter ihop om de delar antingen en kant eller ett hörn.
I slutet av lektionen så får lagen poäng lika med antalet brickor deras största landskap innehåller.

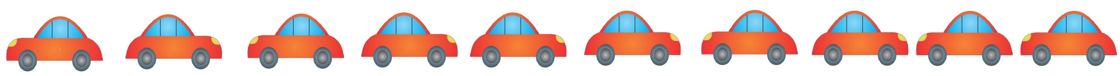
Uppgifter

1. Ett sexsiffrigt tal börjar med siffran 2. Om man raderar den siffran (från vänsterändan) och istället skriver till det på högerändan så får man ett tal som är tre gånger så stort som det ursprungliga. Bestäm det ursprungliga talet.

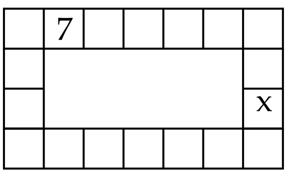
2. Wesley har fem grankulor: en röd, en blå, en gul, en silver och en guld. På hur många sätt kan hon dekorera fem julgranar om det får finnas flera kulor på en och samma gran (alla kulorna måste användas)?

3. En affär säljer en massa lök. Förpackningarna löken säljs i kommer i två varianter. En sorts påse innehåller 10 lökar medan den andra påsen innehåller 15 lökar. En morgon hade affären hälften av sina lökar i 10-löks-påsar. På eftermiddagen så fick affären en ny leverans av 27 stycken 10-lökspåsar. Då hade affären dubbelt så många 10-löks-påsar som 15-löks-påsar. Hur många lökar har då affären totalt?

4. 10 bilar letar efter varsin trevlig plats att parkera på längs med vägkanten. En trevlig plats är en plats där man inte behöver stå ansikte mot ansikte med en annan förare. Därför kommer alla förare som inte har en trevlig plats att byta plats med föraren framför sig, utan att vända på sig. Hur många gånger kommer två bilar att byta plats med varandra, innan alla bilar har parkerat på trevliga platser?



5. Varje ruta innehåller ett tal, men innehållet är endast känt i en av rutorna och tillsammans bildar rutorna en ring. Varje sträng av 4 rutor som sitter ihop utan mellanrum, innehåller tal som tillsammans har summan 24. Vilket tal finns i rutan som är markerad med ett X?



6. Hitta det minsta tresiffriga primtalet där varje siffra är ett primtal.

7. Kanji är ett av fyra japanska skriftspråk, där tecken lånas från kinesiska. Tecknen har både betydelse och (minst) ett ljud.

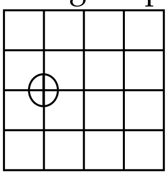
Nedan ser du alla kvadrattal upp till 100 ($1^2, 2^2, 3^2, 4^2, \ldots, 10^2$) skrivet med kanjiregler som använder ett okänt talsystem som liknar vårt. Talen är separerade med vertikala streck (|). För att göra det lite enklare är tecknen utbytta mot sådana som är enklare att rita av. Vilket tal är vilket?

$$\infty \mid \perp\Box\checkmark \mid \Box\perp \mid \natural \mid \bowtie\Box\flat \mid \sharp\Box\perp \mid \checkmark \mid \flat \mid \mho\Box\partial \mid \checkmark\Box\natural$$

8. Vidar går upp och ner längs en lång korridor med 1000 dörrar. Första gången han går förbi så öppnar han alla dörrar. Sen går han tillbaka till starten utan att ändra på några dörrar. Andra gången han går förbi så stänger han varannan dörr med start på den andra dörren. Tredje gången så ändrar han på var tredje dörr, med start på den tredje dörren, så att de som var stängda nu är öppna och de som var öppna nu är stängda. Och så vidare. Den tusende gången ändrar han på dörr 1000 och ingen annan. Hur många dörrar är öppna när Vidar är klar?

9. Hur många 10-siffriga palindromtal finns det som har siffersumman 84? (ett palindromtal är ett tal som läses likadant framifrån som bakifrån).

10. En groda som sitter ett steg åt vänster och två steg uppåt i ett 4x4-gitter påbörjar en följd hopp. Hoppens riktning väljs slumpvis till nån av grodans fyra närmaste gitterpunkter. Följden slutar när grodan når någon av gittrets yttersta punkter. Vad är sannolikheten att följden slutar på de tre nedersta eller de tre översta gitterpunkterna?



11. Hitta den största primtalsdelaren till $17! + \frac{20!}{19}$.

12. Det finns två bräden: ett 8×8 och ett 6×6. Båda bräden ska delas upp i två delar så att alla fyra delarna sedan kan byggas ihop till ett 10×10-bräde. Visa ett exempel på hur man kan göra detta.

13. På en tavla står 9 siffror som skapar talet 948372610. Vid ett drag kan man antingen öka eller minska två närliggande siffror med 1. Man kan också välja ut två siffror som har exakt en siffra emellan de och öka den ena siffran med ett och minska den andra med 1. En siffra kan såklart inte bli större än 9 eller mindre än 0. Vilket är det minsta talet man kan skapa på talvan?

14. Rutorna på ett 100×100-bräde är färgade i svart och vitt. Om man väljer ut en godtycklig 1×2-rektangel så innehåller den alltid minst en svart ruta. Om man väljer ut en godtycklig 1×6-rektangel så innehåller den alltid två svarta rutor intill varandra. Vilket är det minsta möjliga antalet svarta rutor på brädet?

15. Bestäm alla positiva heltal n sådana att $1! + 2! + 3! + \cdots + n!$ är ett kvadrattal.

16. Det finns 5 metallkulor och en balansvåg utan några extra vikter. Tre av kulorna väger 10 gram och man vet att de övriga två väger samma antal gram, men man vet inte vilket. Vilket är det minsta antalet vägningar som krävs för att garanterat bestämma minst en 10 grams kula?

17. Vilken är den sista siffran i talet $9999^{999^{99^{9}}}$?

18. Konungen Friedrich hade 5 söner. Bland hans ättlingar hade 100 stycken exakt 3 söner, medan alla andra dog utan att få några barn. Hur många ättlingar hade konungen Friedrich?

II

Lektionsmaterial programmering

10. Programmering med turtlegrafik

10.1 Turtle och grundläggande syntax

Programmeringen kommer ske i programmeringsspråket Python, ett språk med mycket enkel syntax. Kod skrivs i valfri utvecklingsmiljö (IDE - *integrated development environment*), men IDLE som medföljer Pythoninstallationen fungerar fint. Visual Studio Code är en annan IDE som har användbara funktioner som underlättar kodskrivning, som ni gärna får ladda ned (gratis). Om ni har en chrome book, eller inte vill ladda ner python på er dator, så kommer det fungera att använda `https://repl.it/languages/python3` också, men vi rekommenderar att ladda ner om ni kan.

Nedan följer ett antal tabeller med användbara operationer, först för turtlen men sedan också generellt. Ni kan titta på dessa för att bli påminda om hur kod skrivs i Python.

För att använda turtlar måste du först importera `turtle`-modulen: `import turtle`. För att skapa en padda, skriv `t = turtle.Turtle()`. Detta placerar en turtle mitt i ett fönster, med tänkta koordinataxlar x åt höger, y uppåt. Koordinater motsvarar pixlar. Variabeln `t` refererar nu till en sköldpadda. Kom ihåg att du måste skriva t.ex. `t.forward(100)`, med `t.` först för att datorn ska förstå att det är just turtlen du kallat `t` som ska påverkas (du kan ha mer än en turtle i världen samtidigt).

Metod	Kommentar	Exempel
turtle.Turtle()	*Skapar och returnerar en padda placerad i origo. Om det är första paddan skapas även världen.*	t = turtle.Turtle()
forward(n)	*Gå n pixlar framåt.*	
backward(n)	*Gå n pixlar bakåt.*	
left(n)	*Vrid n grader vänster.*	
right(n)	*Vrid n grader höger.*	
goto(x, y)	*Gå till position (x,y).*	
setx(x)	*Förflyttning i sidled.*	
sety(y)	*Förflyttning i höjdled.*	
setheading(n)	*Sätter riktning. 0 är i x-axelns, 90 i y-axelns riktning.*	t.setheading(180)
circle(radius)	*Gå i cirkel med angiven radie.*	
dot(radius, col)	*Rita en punkt med angiven radie och färg.*	t.dot(10, 'blue')
speed(n)	*Sätter farten.* *0 : snabbast, ingen animering* *1 : långsamt* *5* *9 : snabbt*	

Tabell 10.1: Några användbara metoder för turtlen.

Metod	Kommentar
pendown()	*Kommer att rita.*
penup()	*Kommer ej att rita.*
pensize()	*Returnerar pennans storlek.*
pensize(n)	*Sätter pennans storlek.*
pencolor(colorstring)	*Sätter pennans färg. Exempel: 'blue' eller '#32c18f'. Notera: det senare representerar Röd-Grön-Blå i hexadecimalt med två siffror (0-255)!*
fillcolor(colorstring)	*Sätter fyllningsfärg*
begin_fill()	*Börjar fylla figurer.*
end_fill()	*Slutar fylla figurer.*
clear()	*Tar bort allt paddan har ritat.*
showturtle()	*Gör paddan synlig.*
hideturtle()	*Gör paddan osynlig.*

Tabell 10.2: Några användbara funktioner för pennan.

Här finns också en länk till dokumentationen för turtlen (en exakt beskrivning av allt den kan göra och hur den gör det).
`https://docs.python.org/3.3/library/turtle.html?highlight=turtle`

Här kommer också en tabell med användbara matematiska operationer och hur man gör dem i python:

Exempel	Resultat	Kommentar
5+3	8	Addition
5-3	2	Subtraktion
5*3	15	Multiplikation
5**3	125	Upphöjt till
5/2	2.5	Division med decimaldel
5//2	2	Heltalsdivision
-5//2	-3	Heltalsdivision
37%10	7	Restoperator
10.*10	100.0	Svaret blir ett decimaltal

Tabell 10.3: Några användbara matematiska uttryck.

För att använda operatorer som roten ur måste du importera biblioteket math, detta görs enkelt genom att i början av ditt program skriva `import math`. T.ex. är roten ur då `math.sqrt(x)`.

Exempel	Resultat	Kommentar
5 == 5	True	Likhet
5 != 5	False	Icke-likhet (! negerar)
5 >3	True	Större än
5 >= 5	True	Större än eller lika med
5 <3	False	Mindre än
5 <= 3	False	Mindre än eller lika med
x and y		True omm bägge påståenden är sanna
x or y		True om minst ett av påståenden är sanna
x^y		True om exakt ett av påståenden är sanna
not(True)	False	Omvänder bool

Tabell 10.4: Några användbara logiska operatorer.

I python finns en mängd olika *datatyper*. I många programmeringsspråk måste man specificera datatyp när man deklarerar en variabel, men inte i python. En variabel kan även byta datatyp under en körning. Nedan följer ett antal vanliga datatyper:

Namn	Exempel	Kommentar
int	5	heltal (integer)
float	5.0	flyttal (decimaltal)
str	"Hej!"	textsträng (string), kan skrivas med "eller ’
list	x = [5, ’Hej’, 5.0]	lista, kan innehålla andra datatyper. Listans element är indexerade med start på noll, här 0-2, t.ex: x[2] returnerar 5.0
bool	True	logisk sanning (boolean)

Tabell 10.5: Några vanliga datatyper.

Utöver de kommandon som är specifika för turtlen så finns det också flera kommandon som man kan använda i vilka python-program som helst. Här följer en lista på några av dessa:

Kommando	Exempel	Beskrivning
print()	print("Hello world")	Skriv ut det som står innanför parenteserna
input()	x = input()	Läs in en rad som en sträng
if	if n == 3: #do something	Kolla om villkoret är True eller False, om det är True så körs raderna inne i if-satsen om det är False så hoppar man direkt till det som kommer efter if-satsen

else	if n == 3:
	  #do something
	else:
	  #do something else
		Efter en if-sats kan en else-sats följa,
		men den måste inte göra det. Om det
		finns en else-sats efter en if-sats, så
		hoppar man dit om villkoret i if-satsen är False

elif	if n == 3:
	  #do something
	elif n == 2:
	  #do something else
		Efter en if-sats kan man också ha en elif-sats.
		Om det finns en elif-sats så hoppar man
		dit om villkoret i if-satsen är False, men inte
		annars. Elif-satsen funkar sedan som en if-sats.

while	while n >0: #do something	Så länge villkoret i while-loopen är True, utför allt som står i while-loopen. Mellan varje körning av det som står i loopen kollar man alltså om det fortfarande stämmer.

for	for x in lista:
	  #do something
	———–
	for x in range(n):
	  #do something
		Låt x anta alla värden som står i listan i ordning,
		och utför det som står i loopen för varje sådant x.
		Första gången man går igenom loopen kommer x
		alltså ha värdet som står först i listan, andra gången
		det andra värdet, och så vidare.
		En typisk användning är den som syns i det
		andra exemplet, när listan som x går igenom är
		talen från 0 till n-1. range(n) genererar alltså en
		lista med alla tal från 0 till n-1, i ordning.

continue	ans = 0
	for i in range(10):
	  if i%2 == 0:
	    continue
	  else:
	    ans += i
		Används inuti en loop: gå omedelbart till
		nästa iteration av loopen. I exemplet vill vi
		hitta summan av alla udda tal från 0 till 9.
		Om vi stöter på ett jämnt tal så går vi vidare
		direkt. Om vi stöter på ett udda tal så lägger
		vi till det till summan ans.

break	n = 10
	while (True):
	  print(n)
	  n -= 1
	  if n == 0:
	    break
		Används inuti en loop: avbryt loopen direkt.

import	import math	Importerar ett bibliotek av fördefinierade funktioner.

Tabell 10.6: Några vanliga fördefinierade kommandon och hur de skrivs i Python.

10.2 Uppgifter

Här följer några stycken kod. Tänk igenom koden steg för steg, och skriv ned vad du tror att koden gör och skriver ut. Du kan anta att `turtle` och andra bibliotek redan är importerade:

```
def sum(a,b):
  return (a + b)
x = sum(5,3)
print(x)
```

```
x = 123
if x % 2 == 1:
  print("Talet är jämnt... eller?")
else:
  print("Talet är udda")
```

```
for i in range(10):
  print(i)
  if i == 5:
      print("Oooooch här kommer:")
```

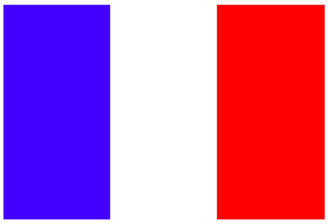
```
def mult(n):
  ut = 1
  for i in range(n):
      ut = ut*(i+1)
  return(ut)

print(mult(4))
```

```
def rita(sida, n, farg):
  t = turtle.Turtle()
  t.pencolor(farg)
  t.fillcolor(farg)
  t.begin_fill()
  for i in range(n):
      t.forward(sida)
      t.left(360/n)
  t.end_fill()
rita(50, 4, "red")
```

Nu ska du få göra ett eget projekt med turtlen! Du får rita precis vad du vill, men om du behöver inspiration kommer här några förslag.

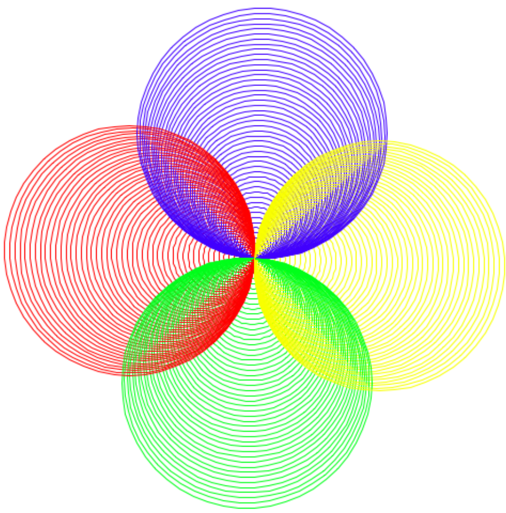
1. Rita franska flaggan. Den ska ha proportionerna 2:3.



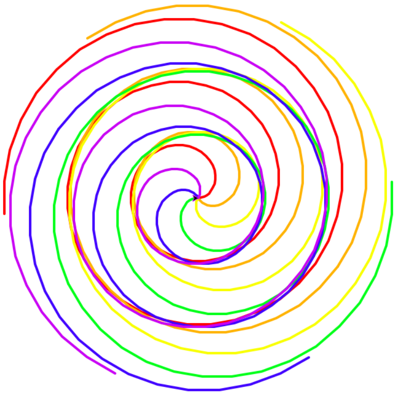
2. Rita en 5-uddig stjärna. De inre vinklarna är 36 grader.

3. Rita en stjärna med n uddar, där n är udda.

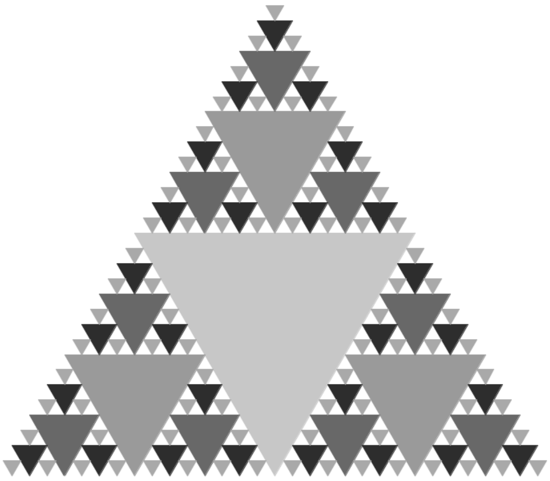
4. Gör en funktion som ritar en cirkel, och försök skapa följande mönster:



5. Gör en funktion som ritar en spiral, och försök skapa följande mönster:



6. Rita en Sierpinskitriangel (se exempel).



7. Rita ett träd.

8. Skapa loggan till Mattekollo 2021!

10.3 Funktioner

Funktioner används för att kunna upprepa kod utan att skriva den igen. Det gör koden både mer lättförståelig och snabbare att skriva.

```python
# namnet "funktion" kan ersättas med valfritt namn, vanligen
# börjat med liten bokstav
def funktion(parameter1, parameter2, mult = 1):
  # Saker görs med parametrarna som skickats in
  a = (parameter1 + parameter2) * mult   # variabel a finns endast i funktionen
  return a     # funktionen skickar tillbaka

# koden mult = 1 betyder att parametern mult får defaultvärde 1
# (om inget annat fylls i blir den 1)
# Exempelanrop:
funktion(5,7,2) # = (5+3)*2
funktion(5,7)   # = (5+3)*1
# För extra tydlighet kan man även anropa en funktion med:
funktion(parameter1 = 2, 3, mult = 5)
# ...då vet läsaren ungefär vilken siffra som betyder vad.
```

10.4 Dictionaries

Dictionaries, eller *lexikon*, är en slags uppsatsverk. Dessa kan användas för att koppla samman uppslagsord, s.k. *nycklar*, med valda definitioner. Exempelvis kan vi koppla ordet `'turkos'` med `'#40E0D0'` (den hexadecimala representationen av färgen turkos). Vi skulle även kunna koppla ihop priser på olika varor och varans namn eller liknande.

```python
# Varor och deras pris:
pris = {'äpplen': 12, 'bananer': 14, 'citroner': 20}
print(pris)  # Skriver ut: {'äpplen': 12, 'bananer': 14, 'citroner': 20}
```

Exempelkod	Värde	Kommentar
pris['bananer']	*12*	*Nycklarna kan användas som index (med hakparentes).*
pris['bananer'] = 14		*Ändrar värdet för befintlig nyckel.*
pris['bananer']	*14*	
pris['dadlar'] = 25		*Lägger till ny nyckel med värde.*
pris	*{'äpplen': 12, 'bananer': 14, 'citroner': 20, 'dadlar': 25}*	*Innehåller nu 4 par.*
'fikon' in pris	*False*	*Test på existens av nyckel.*
'fikon' not in pris	*True*	*Test på icke-existens av nyckel.*
'dadlar' in pris	*True*	*Test på existens av nyckel.*
pris.get('dadlar')	25	*Alternativ till pris['dadlar'].*
pris['fikon']	*Error*	*Illegalt.*
pris.get('fikon')	*None*	*Om nyckeln inte existerar.*
pris.get('fikon', 'Varan finns ej')	Varan finns ej	*Andra parametern anger standardvärde som returneras om nyckeln inte existerar.*
len(pris)	4	*Antalet par.*
del pris['citroner']		*Tar bort ett element utifrån nyckel.*
len(pris)	3	*Antalet par.*
list(pris)	list(pris.keys())	*['äpplen', 'bananer', 'dadlar']*
list(pris.items())	[('äpplen, 12), ('bananer', 14), ('dadlar', 25)]	*En lista av tupler (nyckel-värdepar).*

Häftet innehåller material från Mattekollo 2020 för åk 6-9, alla matematiklektioner samt programmeringsmaterial för nybörjare.

Tack till alla deltagare och ledare!