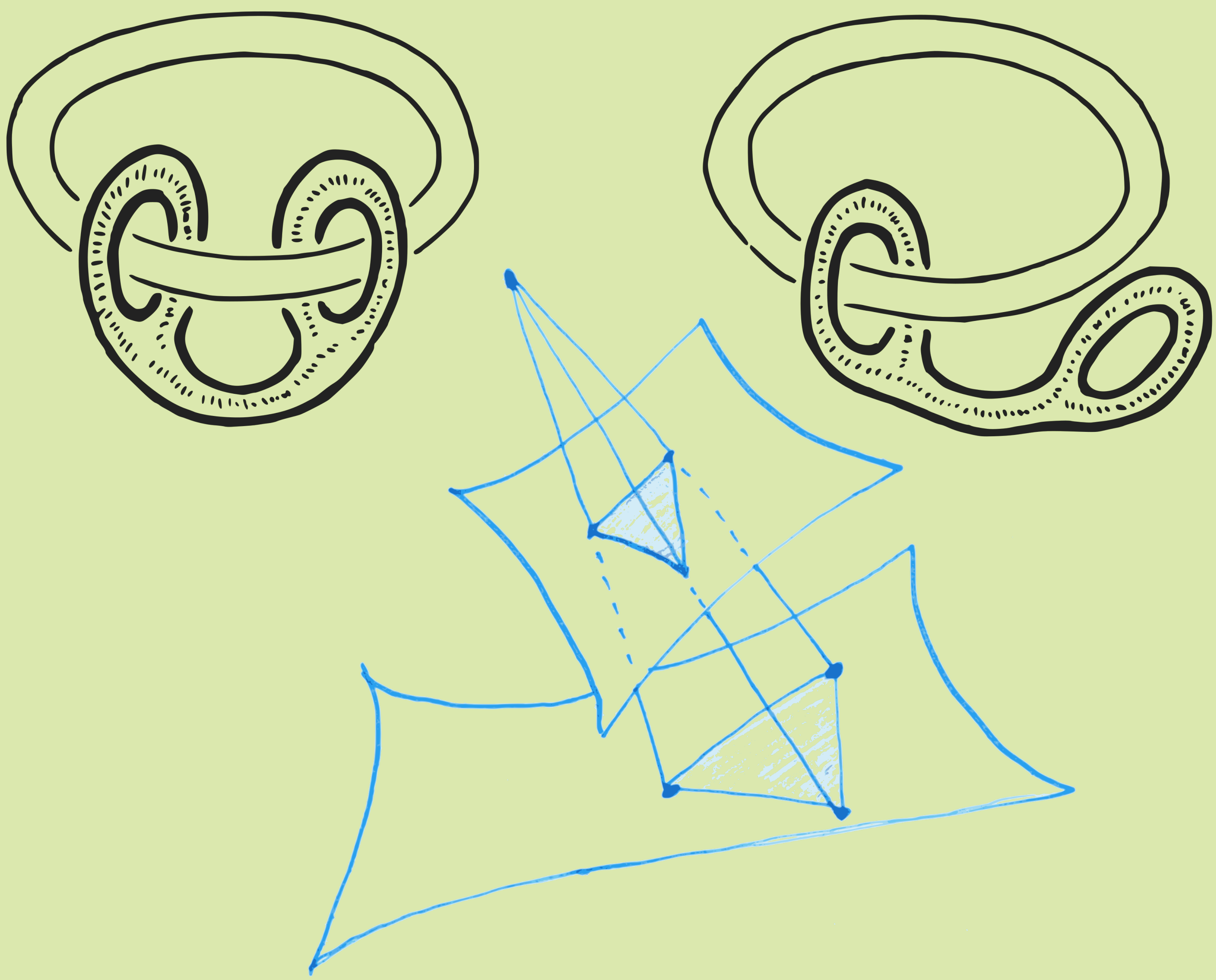
Mattekollo

2020

Lektionsmaterial

åk 9-gy2



Lektionsmaterial Mattekollo 2020

åk 9gy2

V. Chapovalova, H. Eberhard, V. Jansson, A. Villaro Krüger

Norrtälje, augusti 2020

Innehåll

I Mattelektioner

Mattelektioner

1. Talteori

1.1 Talteori 1

1. Vilka heltal n har 0 som delare?

2. Skriv ner alla delare till **(a)** 30 **(b)** 91.

3. Är följande tal primtal **(a)** 101 **(b)** 12345 **(c)** 387878 **(d)** 1437004797 **(e)** 3599

4. Hitta det minsta tresiffriga primtalet där varje siffra är ett primtal.

5. Visa att antalet positiva delare till ett positivt heltal n är max $2\sqrt{n}$.

6. Visa att ett positivt heltal har ett udda antal positiva delare om och endast om det är en kvadrat.

7. Talen $3,5,7$ är alla primtal. Händer det någonsin igen att tre tal på formen $n, n+2, n+4$ alla är primtal?

8. Hitta alla positiva tal n så att de tre talen $3n-4$, $4n-5$ och $5n-3$ alla är primtal.

9. Mellan 10 och 20 finns det 4 primtal. Händer det någonsin igen att fyra tal mellan två på varandra följande multiplar av 10 är primtal?

10. Hitta 100 på varandra följande positiva heltal som alla är sammansatta.

11. Visa att om p och q är två på varandra följande udda primtal så är $p+q$ en produkt av minst tre primtal.

12. Bevisa att det finns oändligt många primtal på formen $4k+3$.

13. Låt summan av de positiva delarna till n betecknas med $\sigma(n)$. Visa att $\sigma(1)+\sigma(2)+\ldots+\sigma(n) \leq n^2$.

14. (IMO 2002) De positiva delarna till n är $1 = d_1 < d_2 < \ldots < d_k = n$. Visa att $d_1d_2 + d_2d_3 + \ldots + d_{k-1}d_k < n^2$.

15. Finns det ett konstant positivt heltal a så att $n^4 + a$ inte är ett primtal för något heltal n?

1.2 Talteori 2

1. Elias har en chokladkaka med $m \times n$ rutor som han ska dela upp i mindre bitar. I varje steg så bryter han av den största kvadraten som går att bryta av. Till slut är det bara en kvadrat kvar. Hur många rutor finns i den kvadraten?

2. (a) Visa att n och $n+1$ är relativt prima.

   (b) (IMO 1959) Visa att $21n+4$ och $14n+3$ är relativt prima, oavsett vad n är.

3. Visa att på varandra följande Fibonaccital alltid är relativt prima.

4. Om du drar en diagonal i en rektangel med 1001×4554 rutor, hur många rutor kommer då diagonalen gå igenom?

5. (a) Bestäm $SGD(n!+1,(n+1)!+1)$.

(b) Bestäm $SGD(10^9-1,10^{15}-1)$.

Sats 1.1. Bezouts identitet. Visa att om x,y är relativt prima så finns det heltal a och b sådana att $ax+by=1$.

6. I denna uppgift ska du bevisa Bezouts sats. Betrakta alla positiva tal på formen $ax+by$, och låt d vara det *minsta* sådana talet. Vi vill visa att $d=SGD(a,b)$.

(a) Visa att om $c \mid a$ och $c \mid b$ så gäller också att $c \mid d$

(b) Antag att d inte delar a och hitta ett tal mindre än d som också är på formen $ax+by$.

Varför är detta tillräckligt för att bevisa att $d=SGD(a,b)$?

7. Hitta den största gemensamma delaren till 273 och 161 och skriv den som en linjärkombination av 273 och 161.

8. Visa att om ett primtal p delar ab så måste p dela antingen a eller b. Varför behöver vi att p är ett primtal?

9. Visa att för positiva heltal a,b,c så har ekvationen $ax+by=c$ heltalslösningar om och endast om $SGD(a,b) \mid c$.

10. Hitta en aritmetisk talföljd av längd 100 så att alla par av tal i följden är relativt prima.

11. Visa att $111\ldots1$ har minst n stycken distinkta primtalsdelare, om antalet ettor är 2^n.

12. Visa att om a och b är relativt prima så är $ab-a-b$ det största talet som inte kan skrivas på formen $ax+by$ för heltal $x,y \geq 0$. Hur många positiva tal finns det som inte kan skrivas på denna form?

13. Två distinkta positiva heltal a och b står skrivna på tavlan. Vi byter upprepat ut det mindre av dem mot talet $\dfrac{ab}{|a-b|}$. Visa att förr eller senare står två lika tal på tavlan.

14. (Baltic Way 2016) Betrakta trianglar i planet, vilkas hörn har heltalskoordinater. En sådan triangel kan lagligt transformeras genom att förskjuta ett hörn parallellt med motstående sida till en ny punkt med heltalskoordinater. Visa, att om två trianglar har samma area, kan den ena fås att sammanfalla med den andra genom en sekvens av lagliga transformationer.

1.3 Talteori 3

Sats 1.2. **(Aritmetikens fundamentalsats.)** Alla positiva heltal kan skrivas som en produkt av primtal på ett unikt sätt.

1. Skriv följande tal som en produkt av primtal: **(a)** 60 **(b)** 105 **(c)** 2020 **(d)** 1001

2. Hur många delare har följande tal: **(a)** 101 **(b)** 101^2 **(c)** 101^3 **(d)** $5^2 \cdot 101^5$

3. Hitta en formel för antalet delare till ett tal givet primtalsfaktoriseringen.

4. Hur många kvadrater finns det i mängden $\{1^1, 2^2, 3^3, \ldots, 2020^{2020}\}$?

5. Vad måste gälla för primtalsfaktoriseringen av ett tal om det är en kvadrat? Vad måste gälla om det är en potens av n?

6. Givet ett positivt heltal a, visa att om $\sqrt[n]{a}$ är ett rationellt tal så är det ett heltal.

7. Hitta alla positiva heltal n så att $9^n = 2^{n+2} + 1$.

8. Ett positivt heltal N är givet. Det visar sig att det finns exakt 2005 par av positiva heltal (x, y) så att $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{N}$. Visa att N är en kvadrat.

9. Hitta alla positiva heltalslösningar till $m^n = n^m$.

10. Visa att bland 51 tal alla mindre än 100 så finns det två tal sådana att det ena delar det andra.

11. Bestäm produkten av alla positiva delare till 720^8.

12. Vad är summan av alla positiva delare till talet 720^8?

13. Kan du hitta en allmän formel för lösningen till de föregående 2 problemen?

14. Visa att $ab = SGD(a, b)MGM(a, b)$.

15. Låt a och b vara positiva heltal så att $MGM(a, b) + SGD(a, b) = a + b$. Visa att ett av talen delar det andra.

16. Visa att för tre positiva heltal a, b, c gäller alltid att

$$\frac{MGM(a,b,c)^2}{MGM(a,b)MGM(a,c)MGM(b,c)} = \frac{SGD(a,b,c)^2}{SGD(a,b)SGD(a,c)SGD(b,c)}$$

17. Primtalsfaktorisera följande tal: **(a)** $19 \cdot 17! + 20!$ **(b)** 27000001 **(c)** $19! + 23!$

1.4 Talteori 4

1. Visa att givet tal a, b, c och d så att $a \equiv c$ och $b \equiv d \pmod{n}$ så gäller att

   (a) $a + b \equiv c + d \pmod{n}$

   (b) $ab \equiv cd \pmod{n}$

   (c) $a^k \equiv c^k \pmod{n}$

2. (a) Visa att siffersumman av ett heltal är kongruent med talet modulo 9.

   (b) Visa att alternerande siffersumman är kongruent med talet mod 11.

3. 2^{29} har exakt nio siffror, och alla är olika. Vilken siffra är det som saknas?

4. Givet ett positivt heltal k, finns det alltid ett primtal p och en följd av 100 tal $a_1 < a_2 < \ldots < a_{100}$ sådana att $p, p + ka_1, p + ka_2, \ldots, p + ka_{100}$ alla är primtal? Kan du göra följden oändligt lång?

5. (a) Vad är sista siffran i $3^{1001}7^{1002}13^{1003}$?

   (b) Vad är sista siffran i $7^{7^{7^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}$, om det finns 777 sjuor i tornet?

   (c) Vad är de sista tre siffrorna i $2003^{2002^{2001}}$?

6. (a) Vad kan x^3 vara modulo 9?

   (b) Visa att det finns tal som inte kan skrivas som en summa av 3 kuber. (Kuriosa: alla tal kan faktiskt skrivas som en summa av fem kuber! Beviset är inte komplicerat, men svårt att hitta. Prova om du vill.)

7. Visa att, för udda positiva heltal k, så gäller att $1 + 2 + \ldots + n$ delar $1^k + 2^k + \ldots + n^k$ för alla n.

8. Visa att alla tal mindre än $n!$ kan skrivas som en summa av max n positiva delare till $n!$.

9. Bestäm alla positiva heltal n sådana att $1! + 2! + 3! + \cdots + n!$ är en heltalspotens.

10. Låt $f(x) = 3x^2 + 1$. Visa att talet

$$f(1) \cdot f(2) \cdot \ldots \cdot f(n)$$

har som mest n distinkta primtalsdelare.

11. Bestäm alla tal n sådana att de inte har en multipel som inte innehåller några nollor.

12. Visa att bland $2n - 1$ tal finns alltid n tal vars summa är delbar med n.

1.5 Talteori 5

Definition. Givet ett tal a och ett tal n så säger vi att x är en **multiplikativ invers** till a modulo n, om $ax \equiv 1 \pmod{n}$.

1. Hitta en invers till 3 modulo 10. Vilka tal har en invers modulo 10?

2. Visa att om a har en invers modulo n, så är den unik modulo n.

3. (a) Visa att om p är en primtal, så har alla tal $a \not\equiv 0 \pmod{p}$ multiplikativa inverser. (Ledtråd: använd Bezouts identitet!)

   (b) Visa att a har en multiplikativ invers modulo n om och endast om a och n är relativt prima.

4. Hitta alla tal x modulo 19 så att $7x \equiv 77 \pmod{19}$.

Sats 1.3. **(Fermats lilla sats)** Givet ett primtal p och ett tal $a \not\equiv 0 \pmod{p}$ så är $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

Definition. **(Eulers ϕ-funktion)** Antalet tal mindre än n som är relativt prima med n betecknas med $\phi(n)$.

Sats 1.4. **(Eulers sats)** Givet ett positivt heltal n och ett tal a som är relativt primt med n så är $a^{\phi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$.

5. I det här problemet ska du bevisa Eulers sats. Betrakta alla tal $x_1, x_2, \ldots x_{\phi(n)}$ som är relativt prima med n och mindre än n. Multiplicera dem alla med a, där a är relativt primt med n, så vi får följden $ax_1, ax_2, \ldots ax_{\phi(n)}$.

   (a) Visa att alla talen i den andra följden är relativt prima med n.

   (b) Visa att alla talen i den andra följden är olika, och dra slutsatsen att det måste vara samma tal som i den första följden modulo n fast i en annan ordning.

   (c) Visa att $a^{\phi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$ genom att multiplicera ihop talen i respektive följd.

   (d) Hur följer Fermats lilla sats från Eulers sats? Fundera på hur varje steg av beviset blir i specialfallet då n är ett primtal.

6. Vad blir resten av $17^{441} - 1$ när man delar med 23?

7. Visa att $2^{(n-1)!} - 1$ är delbart med n, om n är udda.

8. Givet ett primtal p, visa att det finns oändligt många positiva heltal n sådana att $2^n - n$ delas av p.

9. Givet är ett tal n som varken delas av 2 eller 5. Finns det alltid en aritmetisk talföljd med 100 tal $a_1 < a_2 < \ldots < a_{100}$ sådan att alla tal i talföljden $111\ldots111$, $111..111, \ldots$ där tal nummer k i listan består av a_k ettor, delas av n?

Sats 1.5. **(Wilsons sats)** För ett primtal p gäller att $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$.

10. I det här problemet ska du bevisa Wilsons sats.

(a) Visa att $x^2 \equiv 1 \pmod{p}$ om och endast om $x \equiv \pm 1 \pmod{p}$, där p är ett primtal.

(b) Visa genom att para ihop tal med sin invers att $2 \cdot \ldots \cdot (p-2) \equiv 1 \pmod{p}$. Dra slutsatsen att Wilsons sats gäller.

11. Givet är två följder $a_1, a_2, \ldots, a_{p-1}$ och $b_1, b_2, \ldots b_{p-1}$, så att alla tal i respektive följd är olika och nollskilda modulo p. Visa att det finns två tal i följden $a_1b_1, a_2b_2, \ldots, a_{p-1}b_{p-1}$ som är samma modulo p.

12. Är $712! + 1$ ett primtal?

Extrauppgifter

13. Visa att om

$$\frac{m}{n} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{p-1}$$

där p är ett primtal, så gäller att p^2 delar m.

14. (a) Visa att om $p \equiv 2 \pmod{3}$ är ett primtal så har $x^3 \equiv 1 \pmod{p}$ bara lösningen $x \equiv 1 \pmod{3}$. Dra slutsatsen att alla tal har en tredjerot modulo p i detta fall.

(b) Givet är två positiva heltal a och b samt ett primtal $p = 3k + 2$ sådana att $a^2 + ab + b^2$ delas av p. Visa att både a och b delas av p.

15. (a) Visa att för ett primtal $p > 2$ så finns det ett heltal x så att $x^2 \equiv -1 \pmod{p}$ om och endast om $p \equiv 1 \pmod{4}$.

(b) Visa att det finns oändligt många primtal på formen $4k + 1$.

16. Upprepningen av ett heltal definieras som talet vi får av att skriva siffrorna i talet efter sig själv. Till exempel är upprepningen av 123 talet 123123. Finns det något tal vars upprepning är en kvadrat?

17. Visa att $n > 1$ aldrig delar $2^n - 1$.

18. (IMO 2005) Bestäm alla tal som är relativt prima till alla tal i följden $2^n + 3^n + 6^n - 1$.

19. Hitta en formel för $\phi(n)$ givet primtalsfaktoriseringen av n.

20. Visa att $\sum_{d|n} \phi(d) = n$. (Ledtråd: betrakta bråken $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}$).

2. Affin geometri

2.1 Affina transformationer 1

1. Mellan två byar finns en flod med parallella stränder. Man ska bygga en bro som är vinkelrät mot stränderna. Var ska den byggas för att avståndet mellan byarna via bron ska vara det kortaste möjliga?

2. Inuti rektangeln $ABCD$ är punkten M markerad. Visa att det finns en konvex fyrhörning vars diagonaler är vinkelräta och lika långa som AB respektive BC, och vars sidor är av längd AM, BM, CM och DM.

3. Hur tar du den kortaste vägen från ditt hem A till floden (det är en rak linje ℓ) och sedan till din mors hus B?

4. **(a)** Personen A står uppe på land och ser personen B flyta förbi på floden ℓ. En ödla kryper på marken så att den i varje ögonblick befinner sig exakt mitt emellan A och B. Hur ser ödlans väg ut?

(b) Hur ser ödlans väg ut om personen B istället åker runt i karusellen $\mathscr{C}$ (en cirkel)?

5. **(a)** Kan du hitta en trevlig transformation som skickar vilken cirkel som helst till vilken annan cirkel som helst?

(b) Kan du hitta en trevlig transformation som skickar vilken triangel ABC som helst till vilken annan triangel $A'B'C'$ som helst som är likformig med ABC?

6. Två cirklar tangerar varandra i K. En linje som passerar genom K skär dessa cirklar i punkterna A och B. Bevisa att tangenterna till cirklarna genom A och B är parallella med varandra.

7. Två cirklar tangerar varandra i K. Genom K dras två linjer som skär den första cirkeln i punkterna A och B och den andra i punkterna C och D. Bevisa att AB och CD är parallella med varandra.

Affina avbildningar

8. **(a)** Kan du hitta en trevlig transformation som skickar en rektangel till en kvadrat?

(b) Kan du hitta en trevlig transformation som skickar ett parallellogram till en kvadrat?

(c) Kan du hitta en trevlig transformation som skickar vilken fyrhörning som helst till en kvadrat? Om inte, varför?

(d) Gör dina egna andra exempel. Till exempel: Kan vi skicka en ellips till en cirkel? Kan vi skicka 3 godtyckliga punkter till 3 andra godtyckliga punkter?

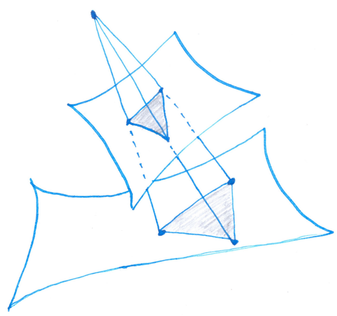
9. Visa med hjälp av affina avbildningar att för varje parallelltrapets så ligger basernas mittpunkter, diagonalernas skärningspunkt samt sidolinjernas skärningspunkt på en och samma linje.

10. I parallelltrapetsen $ABCD$ med baserna AD och BC, går en linje som är parallell med sidan CD genom punkten B så att den skär diagonalen diagonalen AC i punkten P. Genom punkt C går en linje som är parallell med AB och skär diagonalen BD i punkten Q. Visa att PQ är parallell med parallelltrapetsens baser.

2.2 Affina transformationer 2

1. Kan du hitta en transformation som skickar vilket parallellogram som helst till vilket annat parallellogram som helst?

Definition. En projektion genom en punkt p i rummet, från ett plan Π_1 till en annan Π_2 definieras enligt följande: Varje punkt x på Π_1 avbildas på skärningspunkten mellan linjen px och planet Π_2.



2. Kommer varje linje alltid att bli en linje under en projektion?

3. Kan du hitta en linje ℓ på Π_1 som inte skickas till någon linje på Π_2? Om två linjer på Π_1 skär varandra på ℓ, vad kan man säga om deras avbildning på Π_2? Kan vi på något sätt utöka planet för att göra projektiva transformationer bijektiva?

4. Visa att alla fyrhörningar kan avbildas på ett parallellogram med en projektion. Genom att kombinera de transformationer som du känner till, kan du avbilda vilken fyrhörning som helst på vilken annan fyrhörning som helst?

5. Låt O vara skärningspunkten mellan diagonalerna på fyrhörningen $ABCD$; låt E (resp. F) vara skärningspunkten av förlängningarna av AB och CD (resp. BC och AD). Linjen EO skär sidorna AD och BC vid punkterna K respektive L och linjen FO skär sidorna AB och CD vid punkterna M respektive N. Bevisa att skärningspunkten X för linjerna KN och LM ligger på linjen EF.

6. **Desargues sats.** Låt $A_1B_1C_1$ och $A_2B_2C_2$ vara två trianglar. Låt A_1B_1 och A_2B_2 skära varandra i P, låt B_1C_1 och B_2C_2 skära varandra i Q och låt C_1A_1 och C_2A_2 skära i R. Om P, Q och R alla ligger på samma linje ℓ, visa att linjerna A_1A_2, B_1B_2 och C_1C_2 alla skär varandra på samma punkt.

7. Låt ℓ vara en linje och låt Ω vara en cirkel som inte skär linjen. Genom att kombinera de transformationer du känner till, kan du avbilda ℓ i oändligheten medan du fortfarande bevarar cirkeln Ω?

8. När du skickar ℓ till oändligheten i problemet ovan, kommer en viss punkt nu att bli mitt i cirkeln. Kan du hitta den här punkten? Given på någon punkt i en cirkel, är det möjligt att skicka den till mitten av cirkeln med hjälp av transformationer du känner?

9. Låt Ω vara inskriven i en fyrhörning $ABCD$ och tangerar sidorna i punkterna $TUVW$. Visa att linjerna AC, BD, SV, UW alla skär varandra i en punkt.

10. En punkt och en cirkel är givna i planet. Med bara en linjal, är det möjligt att konstruera tangenterna till cirkeln genom den givna punkten?

2.3 Affina transformationer 3

Definition. Vi kallar transformationen φ från planet till sig självt för *affin* om:

1. φ är en bijektion
2. φ avbildar linjer på linjer

1. Visa att parallella linjer avbildas på parallella linjer. Låt ℓ_1 och ℓ_2 vara parallella och låt φ vara en affin transformation. Visa att $\varphi(\ell_1)$ och $\varphi(\ell_2)$ är parallella.

2. Visa att parallella linjer avbildas på parallella linjer. Låt ℓ_1 och ℓ_2 vara parallella och låt φ vara en affin transformation. Visa att $\varphi(\ell_1)$ och $\varphi(\ell_2)$ är parallella.

3. Låt M vara mittpunkten av linjesegmentet AB. Visa att $\varphi(M)$ är mittpunkten av linjesegmentet $\varphi(A)\varphi(B)$. Om vår avbildning är kontinuerlig (nära punkter skickas till nära punkter) bevaras då alla förhållanden mellan punkter på samma linje?

Definition. När vi lägger till linjen i oändligheten i planet får vi det *projektiva planet*. Då korsar varje par av linjer varandra i exakt en punkt, och vi har exakt en linje genom varje par av punkter.

Definition. Vi kallar transformationen φ från det projektiva planet till sig självt för *affin* om:

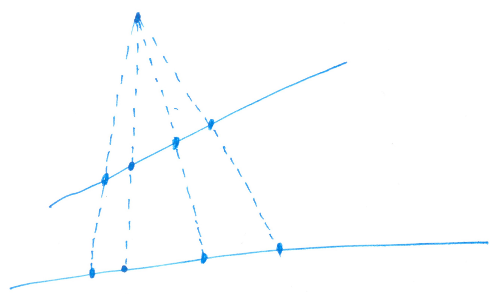
1. φ är en bijektion
2. φ avbildar linjer på linjer

4. Punkterna A, B, X ligger på samma linje. Med bara hjälp av en linjal, kan du hitta punkten M så att M skulle vara mittpunkten av A och B om X skickades till oändligheten?

5. Vi kallar punkter på formen A, B, X, M från den tidigare uppgiften för harmoniska punkter. Visa att av harmoniska punkter fortfarande är harmoniska efter de har blivit avbildade av projektiva transformationer.

6. Två linjer är ritade på ett papper, men de skär varandra utanför papperet. Låt A vara en godtycklig punkt på papperet. Med bara en linjal, kan vi konstruera linjen som går genom punkten A och skärningspunkten mellan de två linjerna?

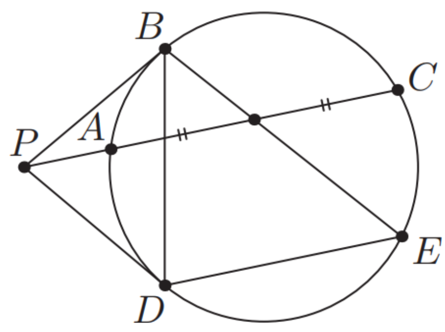
7. Låt p_1, p_2, p_3, p_4 vara harmoniska punkter på en linje ℓ_1. Vi projicerar dem till q_1, q_2, q_3, q_4 på en linje ℓ_2 genom en punkt Q. Vi säger att det här är en projektiv avbildning från ℓ_1 till ℓ_2. Visa at q_1, q_2, q_3, q_4 er harmoniska.



8. Låt ℓ vara en linje och låt p vara en punkt på en cirkel Ω. Projektionen mellan ℓ och Ω till p kallas en projektiv avbildningen mellan en linje och en cirkel. Visa att harmoniska punkter är bevarade under projektiva transformationer mellan linjer och cirklar.

9. En punkt och en cirkel är givna i planet. Med bara en linjal, är det möjligt att konstruera tangenterna till cirkeln genom den givna punkten? Hitta så många harmoniska punkter som möjligt i din konstruktion.

10. (USAJM 2011 Problem 5)



11. Låt φ vara en projektiv transformation mellan linjer eller cirklar. Om man kan anta kontinuitet, kan man visa att φ är unikt bestämt om vi vet bilden av tre punkter?

12. On side AB of quadrilateral $ABCD$ point M_1 is taken. Let M_2 be the projection of M_1 to line BC from D, let M_3 be the projection of M_2 to CD from A, M_4 the projection of M_3 on DA from B, M_5 the projection of M_4 to AB from C, etc. Prove that $M_{13} = M_1$ (hence, $M_{14} = M_2, M_{15} = M_3$, etc.).

Definition. Ett *kägelsnitt* är bilden av en cirkel under en projektiv transformation. Obs: Problemet med denna definition är att vi inte har en projektiv definition av en cirkel. Detta kommer att åtgärdas senare.

Definition. Mängden linjer genom en punkt p, kallas en *knippe*. En avbildning som tar någon punkt x på en linje ℓ till linjen px kallas en projektiv transformation.

13. Hur skulle du definiera harmoniska fyrtupler av knippen av linjer och hur skulle man kunna definiera en projektiv avbildning mellan två knippen av linjer?

Definition. **Steiners definition av ett kägelsnitt.** Låt P_1 vara en knippe av linjer genom punkten p_1, och låt P_2 vara knippen av linjer genom punkten p_2. Låt φ vara en projektiv avbildning från P_1 till P_2. Sedan är ett *kägelsnitt* mängden av skärningspunkter mellan linjer $\ell \in P_1$ och $\varphi(\ell) \in P_2$. (Obs! Vi har ett undantag i specialfallet när φ avbildar linjen p_1p_2 till sig själv, i detta fall är mängden av skärningspunkter en linje).

14. Tillfredsställer alla kägelsnitt definierade med vår första definition även *Steiners definition*?
Uppfyller alla kägelsnitt definierade med *Steiners definition* nödvändigtvis vår första definition?

15. Anta att en triangel ABC och en punkt Z är givna. För en godtycklig linje som går igenom Z, låt A' och B' vara dess skärningspunkter med BC och AC. Då är mängden skärningspunkter mellan linjerna AA' och BB' ett kägelsnitt som passerar genom A, B och C, och tangenten till linjerna AZ och BZ.

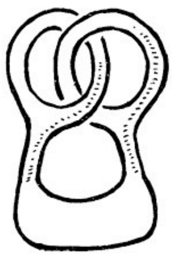
3. Topologi

3.1 Topologi

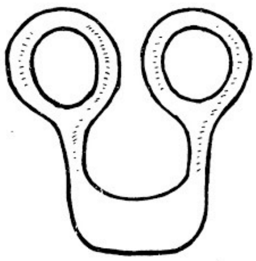
Ritningar av V. Prasolov

Homotopi

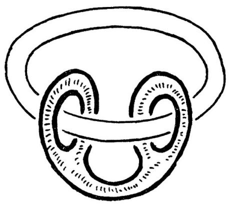
Två föremål är homotopiska om det finns en kontinuerlig en-till-en-deformation från det ena objektet till det andra. Är följande objekt homotopiska?:



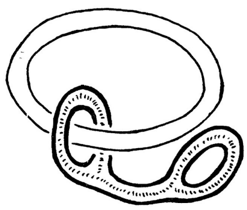
(a)



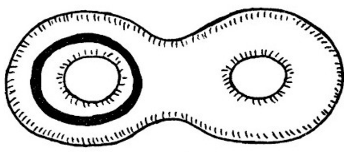
(b)



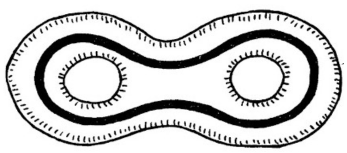
(a)



(b)

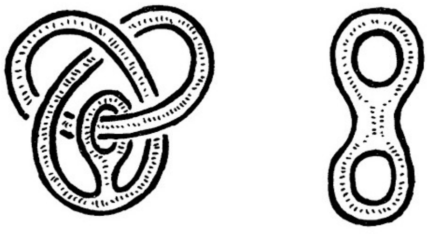


(a)



(b)

För det andra problemet, är det möjligt att separera torusen och dubbel-torusen? Är det möjligt att vändra ett cykelhjul inifrån och ut?



(a) (b)

Homotopiklasser

En inbäddning av ett objekt X i ett rum Y kan representeras som en fin (injektiv och kontinuerlig) funktion f från X in i Y. Vi kan bädda in ett objekt X i ett rum Y på olika sätt. Vi säger att två inbäddningar tillhör samma homotopiklass om inbäddningarna kontinuerligt kan deformeras till varandra.

1. Hur många klasser av cirklar i planet har vi?

2. Har vi mer än en klass av cirklar i rummet?

3. Om vi tar bort en linje från rummet, hur många klasser av munkar med två hål har vi?

4. Fortsätt undersöka dina egna exempel!

5. Vad betyder det faktiskt att två inbäddningar kan "kontinuerligtformas till varandra? Om $f_1 : X \longrightarrow Y$ och $f_2 : X \longrightarrow Y$ är två olika inbäddningar av samma objekt X i samma rum Y, kan du ge en definition av när inbäddningarna är i samma homotopiklass?

6. (*) Låt X_1 och X_2 vara olika objekt. När håller det att X_1 och X_2 har samma homotopi-klasser i något utrymme Y?

Projektiva Planet i Topologi

1. En cirkel klipps ut från det projektiva planet. Visa att man får ett Möbiusband. Med andra ord, visa att det projektiva planet kan klistras ihop utav ett Möbiusband och en cirkel om man klistrar ihop längs med kanten (varje har en cirkel som kant).

2. Visa att man kan få det projektiva planet om man tar en sfär och klistrar ihop diametralt motstående punkter.

3. Visa att det projektiva planet även kan fås genom att ta en cirkel och klistra ihop diametralt motstående punkter på randen.

4. Projektiv geometri

4.1 Affina Transformationer

Definition. Vi kallar avbildningen φ från planet till sig självt för *affin* om:

1. φ är en bijektion
2. φ avbildar linjer på linjer
3. φ är kontinuerlig

Begreppen *affin avbildning* och *affin transformation* syftar på samma sak.

1. Ge några exempel på affina avbildningar.

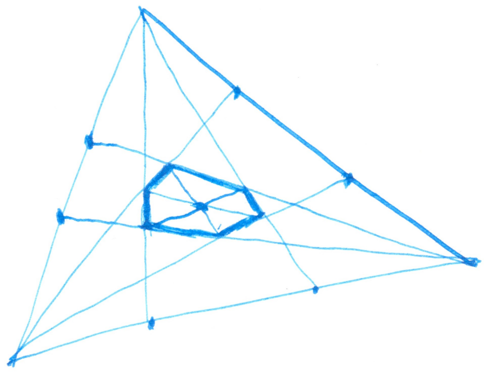
Följande problem handlar om affina transformationer:

2. Visa att parallella linjer avbildas på parallella linjer. Låt ℓ_1 och ℓ_2 vara parallella och låt φ vara en affin transformation. Visa att $\varphi(\ell_1)$ och $\varphi(\ell_2)$ är parallella.

3. Låt M vara mittpunkten av linjesegmentet AB. Visa att $\varphi(M)$ är mittpunkten av linjesegmentet $\varphi(A)\varphi(B)$. Visa att förhållandet mellan sträckor på samma linje bevaras under affina transformationer.

4. Vilka frihetsgrader har en affin transformation? Med andra ord, kan du avbilda 2, 3 eller 4 punkter till helt valfria punkter under någon affin transformation? Och om du vet vart 2, 3 eller 4 punkter avbildas, finns det några andra punkter som är bestämda under den affina transformationen?
Obs. Vi har olika fall, men den mest intressanta är när inga 3 av punkterna är kollineära.

5. Två linjer är dragna igenom varje hörn på en triangel. Linjerna delar upp den motsatta sidan av triangeln i 3 lika långa delar. Visa att diagonalerna som kopplar ihop de motstående hörnen av hexagonen som formas av dessa linjer möts i en punkt.



6. I en parallelltrapets $ABCD$ med baserna AD och BC, är linje en dragen genom punkt B, parallell till sidan CD and skär diagonalen AC i punkten P; genom punkt C dras en linje parallell till AB som skär diagonalen BD i Q. Visa att PQ är parallell till parallelltrapetsen baser.

7. Vad kan man säga om en affin transformation som avbildar en cirkel på sig själv?

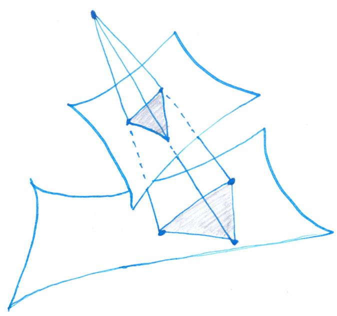
8. Kan du hitta fler invarianter? Area? Vad händer med en konvex hexagon? Kan man generalisera mittpunktsinvarianten till fler dimensioner?

9. Hade vi kunnat definiera affina transformationer på ett annat sätt?
Måste de vara kontinuerliga och varför? Skulle vi kunna definiera det som en komposition av utvidgningar längs med axlar? Skulle vi kunna definiera det algebraiskt, dvs. skriva att $(x, y) \longrightarrow (f_1(x, y), f_2(x, y))$? Hur skulle f_1 och f_2 se ut?

10. Givet är en triangel ABC. Låt G vara triangelns centroid (skärningen mellan dess medianer), och låt M, N och P vara punkter på sträckorna AB, BC och CA, som delar sidorna i samma förhållande (dvs., $AM : MB = BN : NC = CP : PA = p : q$)
Visa att:
a) G är centroiden i triangeln MNP;
b) G är centroiden i triangeln som skapas av linjerna AN, BP and CM.

4.2 Projektiva Transformationer

Definition. En projektion genom en punkt p i rummet, från ett plan Π_1 till en annan Π_2 definieras enligt följande: Varje punkt x på Π_1 avbildas på skärningspunkten mellan linjen px och planet Π_2.



1. Visa att linjer skickas till linjer under en projektiv transformation. Är en projektiv transformation nödvändigtvis en affin transformation? Ge några exempel på projektiva transformationer.

2. Kan du hitta en linje ℓ på Π_1 som inte skickas till någon linje på Π_2? Om två linjer på Π_1 skär varandra på ℓ, vad kan man säga om deras avbildning på Π_2? Kan vi på något sätt utöka planet för att göra projektiva transformationer bijektiva?

3. Hur mycket frihet har vi? Till exempel: Kan vi skicka två linjer / punkter till vilka två andra linjer / punkter som helst och så vidare? Kan vi skicka någon triangel eller någon fyrhörning till vilken annan triangel eller fyrhörning som helst? Om vi vet avbildningen av 6, 5, 4 eller 3 punkter, kan vi bestämma avbildningen av någon annan punkt?

4. Låt O vara skärningspunkten mellan diagonalerna på fyrhörningen $ABCD$; låt E (resp. F) vara skärningspunkten av förlängningarna av AB och CD (resp. BC och AD). Linjen EO skär sidorna AD och BC vid punkterna K respektive L och linjen FO skär sidorna AB och CD vid punkterna M respektive N . Bevisa att skärningspunkten X för linjerna KN och LM ligger på linjen EF.

5. I många geometriproblem har vi en cirkel. Om vi skickar en linje som inte korsar en cirkel till oändligheten, vad händer då med cirkeln? Om vi blandar projektiva och affina transformationer, kan vi bevara en cirkel medan vi skickar en linje till oändligheten (om den inte korsar cirkeln)? Vad kan man annars göra? Kan vi ta en punkt och skicka den till mitten av cirkeln medan vi bevarar cirkeln?

6. Låt Ω vara inskriven i en fyrhörning $ABCD$ och tangerar sidorna i punkterna $TUVW$. Visa att linjerna AC, BD, SV, UW alla skär varandra i en punkt.

7. Om vi ger er fler problem där ni ska använda de metoder ni måste upptäcka kommer dessa problem inte att bli problem eftersom ni redan har lösningen. Istället är ett problem att hitta era egna geometriproblem och lösa dem med pro-

jektiva transformationer. Svårigheten ligger inte i att använda verktyget utan att förstå när verktyget är användbart. Kom dessutom ihåg att ni inte får verktyg för att lösa problem. De är bara ett sätt att se ett annat perspektiv. En bra källa för problem är *Akopyan's Geometry in Figures*:
https://users.mccme.ru/akopyan/papers/EnGeoFigures.pdf

8. Hur generaliseras projektiva transformationer i två dimensioner och i högre (Tänk stort!) Dimensioner?

4.3 Det projektiva planets natur

Definition. Ett projektivt plan består av en uppsättning linjer, en uppsättning punkter och en relation mellan punkterna och linjerna:

1. Givet två distinkta punkter finns det exakt en linje som går igenom båda.
2. Givet två distinkta linjer finns det exakt en punkt som hör till båda.
3. Det finns fyra punkter så att ingen linje innehåller fler än två av dem.

Hur kan denna definition fungera? Ge exempel på komplexa plan som skiljer sig från den vi redan har arbetat med. Vi kommer inte att använda denna definition bokstavligt och vi kommer att fortsätta arbeta i de reella och komplexa projektiva planen, så vi kan fortfarande anta kontinuitet. Poängen är att vi kan konstruera projektiv geometri utifrån dessa definitioner istället för att lägga till linjen i oändligheten till de Euklidiska definitionerna. Linjen i oändligheten skiljer sig inte från någon annan linje i projektiv geometri. I euklidisk och affin geometri fäster vi en linje till att vara i oändligheten.

1. I affin geometri kunde vi konstruera mittpunkter på ett naturligt sätt. Sedan använde vi kontinuitet för att få förhållanden. Hur ser konstruktionen med ett parallellogram ut i det projektiva rummet när linjen i oändligheten introduceras? Kan vi hitta ny invariant?

2. Två linjer är ritade på ett papper, men de skär varandra utanför papperet. Låt A vara en godtycklig punkt på papperet. Med bara en linjal, kan vi konstruera linjen som går genom punkten A och skärningspunkten mellan de två linjerna?

3. Två punkter A och B är givna i planet och vi har en linjal. Tyvärr är vår linjal kortare än avståndet mellan A och B. Är det fortfarande möjligt att dra linjen genom A och B?

4. En punkt och en kägelsnitt är givna i planet. Med bara en linjal, är det möjligt att konstruera tangenterna till kägelsnittetet genom den givna punkten?

5. Kan man göra projektiva transformationer mellan linjer och cirklar? Vad kan man säga om dubbelkvoter?

6. Mängden av linjer genom punkten A i planet kallas för en kärve av linjer. Kan man skapa en naturlig avbildning mellan en kärve av linjer genom en punkt A i planet, med en projektiv linje ℓ som inte går igenom A?

7. Hur skulle man definiera en projektiv avbildning mellan två kärvar av linjer i planet? Beskriv skärningen mellan två linjer, en från varje kärve som avbildas på varandra.

8. Kan ett kägelsnitt definieras projektivt?

9. Betrakta mängden av kägelsnitt som går igenom 4 av de givna punkterna i planet (inga 3 punkter är kollineära). Mängden av kägelsnitt som går igenom fyra av dessa punkter kallas en kärve av kägelsnitt. Vi har tre degenererade kägelsnitt i kärven (dubbellinjer). Välj en annan linje i planet. För varje punkt på linjen väljer vi ett unikt kägelsnitt i kärven som går igenom den punkten. Kägelsnittet skär linjen i ytterligare en punkt. Detta definierar en avbildning på linjen. Beskriv denna avbildning.

Vad kan man säga om kägelsnittskärven genom punkterna A, B, C och höjdernas skärningspunkter H utav triangeln $\triangle ABC$?

10. I projektiv geometri så definieras punkter och linjer symmetriskt. Vad händer om punkter byter plats med linjer och vice versa? Vad händer med dubbelkvoter? Vad händer med kägelsnitten?

11. (*) Kan du definiera en andragrandsyta (en yta i det 3-dimensionella projektiva rummet av grad 2) projektivt?

4.4 Dubbelkvot och kägelsnitt

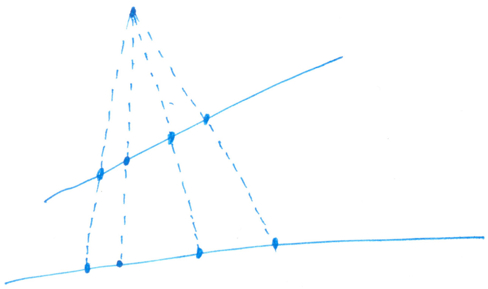
Definition. Vi har konstruerat harmoniska kärvar i det projektiva planet, och genom kontinuitet har vi *dubbelkvoten* $[p_1, p_2, p_3, p_4]$ mellan alla fyra punkter på en linje. Detta är en invariant under projektiv transformation.
Fakta: I det euklidiska planet, om fyra punkter A, B, C och D ligger i ordningen, definieras deras dubbelkvot av

$$\frac{|AC|/|AD|}{|BC|/|BD|}$$

(multiplicerat med -1 om punktordningen följer $A-B-D-C$ eller $B-A-C-D$).

1. Låt p_1, p_2, p_3, p_4 på en linje ℓ_1 projiceras till q_1, q_2, q_3, q_4 på en linje ℓ_2. Visa att dubbelkvoten $[p_1, p_2, p_3, p_4]$ och $[q_1, q_2, q_3, q_4]$ är desamma. Vi säger att det här är en projektiv avbildning från ℓ_1 till ℓ_2.

2. En punkt och ett kägelsnitt är givna i planet. Med bara en linjal, är det möjligt att konstruera tangenterna till kägelsnittetet genom den givna punkten?



Definition. Låt ℓ vara en linje och låt p vara en punkt på en kägelsnitt Ω. Projektionen mellan ℓ och Ω till p kallas en projektiv avbildningen mellan en linje och en cirkel.

3. Visa att harmoniska kärvar (och därmed dubbelkvot) bevaras när man projicerar från en linje till ett kägelsnitt och tillbaka till en annan linje. Detta gör att vi kan prata om harmoniska kärvar och dubbelkvot på ett kägelsnitt.

4. Vilka projektioner mellan två cirklar bevarar dubbelkvoter?

5. Visa med hjälp av den ovanstående definitionen av ett kägelsnitt, att det finns ett kägelsnitt genom alla 5 punkter i planet (om nr 3 av dem ligger på en linje). Är detta kägelsnitt unikt?

Definition. Mängden linjer genom en punkt p, kallas en *knippe*. En avbildning som tar någon punkt x på en linje ℓ till linjen px kallas en projektiv transformation.

6. Hur skulle du definiera harmoniska kärvar av en knippe av linjer och hur skulle man kunna definiera en projektiv avbildningen mellan två knippe av linjer?

Definition. **Steiners Definition av ett kägelsnitt** Låt P_1 vara en knippe av linjer genom punkten p_1, och låt P_2 vara knippen av linjer genom punkten p_2. Låt φ vara en projektiv avbildning från P_1 till P_2. Sedan är ett *kägelsnitt* mängden av skärningspunkter mellan linjer $\ell \in P_1$ och $\varphi(\ell) \in P_2$. (Obs! Vi har ett undantag i specialfallet när φ avbildar linjen p_1p_2 till sig själv, i detta fall är mängden av skärningspunkter en linje).

7. Tillfredsställer alla kägelsnitt definierade med vår första definition *Steiner's Definition*?
Uppfyller alla kägelsnitten definierade med *Steiner's Definition* nödvändigtvis vår första definition?

8. Anta att en triangel ABC och en punkt Z är givet. För en godtycklig linje som passerar genom Z, låt A' och B' vara dess skärningspunkter med BC och AC. Då är mängden skärningspunkter mellan linjerna AA' och BB' ett kägelsnitt som passerar genom A, B och C, och tangenten till linjerna AZ och BZ.

Definition. Mängden av kägelsnitt genom fyra givna punkter kallas en *Knippe av Kägelsnitt*.

9. **Desargues Involutionssats.** Låt ℓ vara en linje och låt F vara en knippe av kägelsnitt. För alla punkter p på ℓ definierar vi $\varphi(p)$ som skärningspunkten mellan ℓ och kägelsnittet på F till p. Visa att φ är en projektiv avbildning och notera att φ^2 är identiteten.

10. (*) Kan du hitta en projektiv transformation mellan knippar av kägelsnitt eller mellan knippar av kägelsnitt och linjer? Kan du definiera dubbelkvoter på knippar av kägelsnitt?

11. (*)Låt p vara en punkt, och låt F vara en knippe av kägelsnitt. Vad är mängden polarlinjer till p med avseende på alla kägelsnitt i F?
Låt ℓ vara en linje, vad är poluppsättningen till ℓ med avseende på alla kägelsnitten i F?
Låt H vara ortocentret i triangeln ABC, och låt F vara knippet av kägelsnitt genom H, A, B och C. Vilken är poluppsättningen till linjen vid oändligheten med av avseende på något kägelsnitt i F?

4.5 Homogena koordinater

Linjen med en punkt i oändligheten kallas den projektiva linjen och den betecknas med $\mathbb{P}^1$. Det projektiva planet betecknas med $\mathbb{P}^2$ och så vidare. Observera att vi har den reella projektiva linjen såväl som den komplexa projektiva linjen (eller över någon annat kropp). Vi vill kunna använda algebraiska metoder i projektiv geometri, eftersom vi måste ha ekvationer för linjer, kägelsnitt och kubiska kurvor och det är ibland lättare att representera skärningar med algebra. Vanliga koordinater inkluderar emellertid inte punkten i oändligheten så vi måste använda homogena koordinater.

För den projektiva linjen använder vi koordinaterna $(x_0 : x_1)$. Vi säger $(x_0 : x_1) = (\lambda \cdot x_0 : \lambda \cdot x_1)$ för ett godtyckligt tal λ. Till exempel ersätter vi koordinaten $3 = \dfrac{3}{1} = \dfrac{6}{2}$ med den homogena koordinaten $(3 : 1) = (6 : 2)$. Punkten vid oändligheten $\infty = \dfrac{1}{0} = \dfrac{1331}{0}$ har homogena koordinater $(1 : 0) = (1331 : 0)$. Detta ger koordinater till oändligheten.

1. (Svårt, kan hoppas över) Låt $(x : y) \to (\varphi_1(x, y) : \varphi_1(x, y))$ vara en projektiv avbildning av $\mathbb{P}^1$ i homogena koordinater. Vilken form kan φ_1 och φ_2 anta?

2. Generalisera homogena koordinater till det projektiva planet. Du kan också försöka generalisera det till n dimensioner och förstå varför skärningspunkten mellan två plan i $\mathbb{P}^3$ är en linje.

3. Vad är ekvationen för en linje i $\mathbb{P}^2$ med homogena koordinater? Vad är ekvationen för ett kägelsnitt? Hur många skärningar har en hyperbel, en parabel och en ellips med linjen i oändligheten? Vad händer om vi tillåter komplexa korsningar? Hur många punkter räcker för att bestämma ett kägelsnitt?

4. Kan en hyperbel avbildas på en ellips under en affin transformation av det reella planet? Vad sägs om det komplexa planet? Vad sägs om en parabel?

5. Problem i praktiken:

1. Låt $\phi : \mathbb{P}(\mathbb{Q}) \to \mathbb{P}(\mathbb{Q})$ vara en projektiv transformation som avbildar $1/2$ på $4/7$, $4/7$ på $29/51$ och $5/8$ på 173. Vad är bilden av $13/23$?
2. Bestäm kägelsnittet genom följande 5 punkter $(-3 : -2 : 1), (16 : 9 : -6), (-3 : -3 : 1), (29 : 17 : -11), (-28 : -19 : 10)$.
3. Bestäm kägelsnittet genom följande 3 punkter $(0 : 3 : 1), (-1 : 1 : 1), (-3 : 14 : 6)$ som tangerar linjen $6x_0 - 6x_1 + 20x_2 = 0$ i $(3 : -7 : -3)$.

6. ** **Bezouts Sats**
Visa att två kurvor av graden n respektive m har $n \cdot m$ skärningar, när vi räknar komplexa skärningar, skärningar vid oändligheten, och vi räknar skärningar med multiplicitet. Detta är mycket svårt, men försök göra det när $n = 1$, och kanske $n = m = 2$. Hur skulle du generalisera det till högre dimensioner?
Obs! När två skärningspunkter konvergerar mot varandra blir kurvorna tangenta i denna punkt och vi säger att skärningspunkten har multipliciteten 2. Högre multipliciteter är också möjliga. Du kan försöka definiera multipliciteter noggrant genom att differentiera kurvorna.

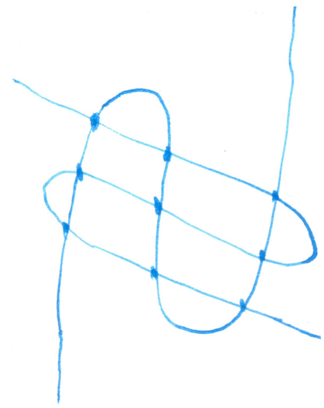
7. Betrakta den homogena ekvationen för cirkeln i $\mathbb{P}^2$. Hitta två punkter som alla cirklar går igenom. Visa att ett kägelsnitt är en cirkel om den går igenom dessa två punkter. Dessa två punkter kallas *de cirkulära punkterna.*

8. Var skär två koncentriska cirklar varandra?

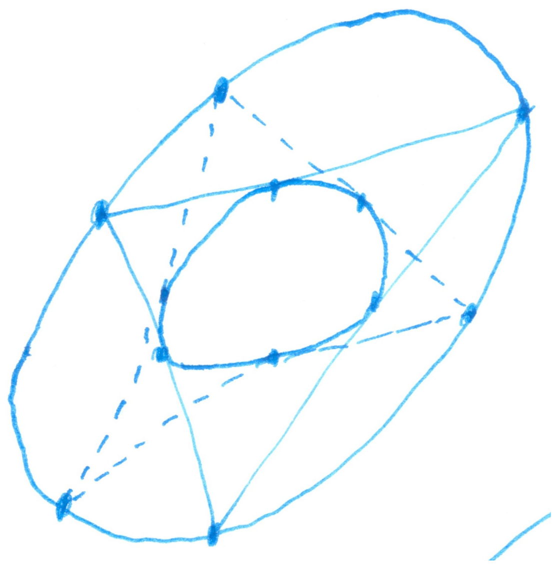
9. Låt $\mathscr{C}_1, \mathscr{C}_2, \mathscr{C}_3$ beteckna tre kägelsnitt som alla tre skär varandra i p_1 och p_2. Dessutom skär $\mathscr{C}_1$ och $\mathscr{C}_2$ varandra i a_1 och a_2. $\mathscr{C}_2$ och $\mathscr{C}_3$ skär varandra i b_1 och b_2. $\mathscr{C}_3$ och $\mathscr{C}_1$ skär varandra i c_1 och c_2. Visa att de tre linjerna a_1a_2, b_1b_2, c_1c_2 skär varandra i en gemensam punkt.

10. (*) Hur många frihetsgrader har en kubisk kurva? Med andra ord, hur många punkter behövs för att bestämma en kubisk kurva? (*Förklarande ledtråd: Titta på antalet koefficienter.*)
Hur många skärningar har två kubiska kurvor alltid? Något är konstigt eller hur? Ett viktigt resultat följer av detta. Detta resultat ger ett mycket enkelt bevis på problem 7, Reims teorem, Pascals sats, Miquel-punkten och många andra satser. Kanske viktigast av allt, associativitet för gruppoperationen på elliptiska kurvor. Ja, det finns en gruppoperation på punkterna av en elliptisk kurva. Om du vet vad en grupp är kan du försöka hitta den.

11. (*) Låt f vara en fokuspunkt för ett kägelsnitt $\mathscr{C}$. Visa att tangenterna till $\mathscr{C}$ som dras från f går genom cirkulära punkter vid oändligheten. Använd detta som definitionen av en fokuspunkt och visa att ett kägelsnitt faktiskt har fyra fokuspunkter.



12. (*) Ta ett geometriproblem från en mattetävling och försök att flytta en av punkterna i problemet till någon linje. Se hur de andra punkterna i problemet varierar och vad de varierar på för punktmängd. Ibland visar det sig att de varierar på ett kägelsnitt. Vanligtvis kan du lösa ett geometriproblem genom att definiera två olika punkter och visa att de sammanfaller. Om du kan visa att alla punkter i din bild varierar projektivt till varandra räcker det att visa problemet i 3 fall som du väljer dig själv eftersom en projektiv avbildning är unikt definierad av bilden av 3 punkter.



13. (**) **Poncelets Porism** Låt $\mathscr{C}_1$ och $\mathscr{C}_2$ vara två kägelsnitt. Välj en punkt p_1 på $\mathscr{C}_1$. Rita en av tangenterna till $\mathscr{C}_2$ i p_1 och låt den skära $\mathscr{C}_1$ i ytterligare en punkt p_2 skild från p_1. Fortsätt att rita tangenter från p_i till $\mathscr{C}_2$ och definiera p_{i+1} rekursivt. Visa att om $p_n = p_1$ för ett positivt heltal n, så är $p_n = p_1$ för varje val av p_1 på $\mathscr{C}_1$.

4.6 Intressanta kurvor och ytor

Andragradsytor

1. Låt ℓ_1 och ℓ_2 vara två disjunkta linjer i $\mathbb{P}^3$ (disjunkt: de skär inte varandra, och de ligger inte på samma plan). För två punkter $p_1 \in \ell_1$ och $_2 \in \ell_2$ rita linjen genom p_1 och p_2. Visa att dessa linjer bildar en andragradsyta. Kan alla andragradsytor bildas på detta sätt?

2. Givet tre disjunkta linjer i $\mathbb{P}^3$, bevisa att det finns en unik andragradsyta som innehåller dessa tre rader.

3. Låt $\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4$ vara fyra disjunkta linjer i $\mathbb{P}^3$. Hur många linjer skär alla dessa fyra linjer?

Veronese-kurvor

4. Hur kan en *knippe av hyperytor* definieras i $\mathbb{P}^n$? Genom att ta skärningspunkten mellan n pennor av hyperplan som varierar projektivt får vi *Veronese Kurvan*. Vad är graden för Veronese-kurvan? Kan någon Veronese-kurva skickas till någon annan Veronese-kurva genom någon projektiv omvandling av $\mathbb{P}^n$?

5. Hur kan vi ha en projektiv avbildning mellan linjen $\mathbb{P}^1$ och Veronese-kurvan i $\mathbb{P}^n$? Vilken kurva får vi när vi projicerar Veronese-kurvan från $\mathbb{P}^3$ till planet? Kan du definiera en projektiv transformation mellan denna kurva och $\mathbb{P}^1$?

4.7 Projektiva problem

Algebra

Definition. Låt K vara en kropp. Betrakta ett $(n+1)$-dimensionellt vektorrum K^{n+1}. Ta bort origo och (precis som med vanliga homogena koordinater) inför en ekvivalensrelation på vektorerna: två vektorer är ekvivalenta om och endast om de är kollineära, dvs $(a_0, a_1, \dots, a_n) \sim (\lambda a_0, \lambda a_1, \dots, \lambda a_n)$.

Mängden med ekvivalensklasser kallas för det n-dimensionella *projektiva rummet* över kroppen K och betecknas KP^n. En ekvivalensklass, alltså en punkt i ett projektivt rum betecknas $[a_0 : a_1 : \cdots : a_n]$.

1. En till definition av $\mathbb{R}P^2$ (som kan generaliseras) är att det är mängden av alla linjer i 3D som går igenom origo. Visa att denna definition är ekvivalent med definitionen ovan.

Topologi

Vi definierar inte saker strikt nedan.

2. Visa att $\mathbb{C}P^1$ är en sfär.

3. (a) En cirkel klipps ut från det projektiva planet. Visa att man får ett Möbiusband. Med andra ord, visa att det projektiva planet kan klistras ihop utav ett Möbiusband och en cirkel om man klistrar ihop längs med kanten (varje har en cirkel som kant).

(b) Visa att man kan få det projektiva planet om man tar en sfär och klistrar ihop diametralt motstående punkter.

(c) Visa att det projektiva planet även kan fås genom att ta en cirkel och klistra ihop diametralt motstående punkter på randen.

Kombinatorik

4. Hur många punkter finns det i det n-dimensionella projektiva rummet över kroppen $\mathbb{Z}_p$ (restklasser mod p där p är ett primtal)?

5. Hur kan spelet Dobble betraktas som ett projektivt plan?

6. Det finns “““““““““““““‘ personer på en skola. Varje dag är det tre som ansvarar för att det ska vara trevlig stämning. Visa att man kan göra upp ett schema över ett antal dagar så att varje par av personer på skolan kommer ha exakt en dag gemensam då de ansvarar för den trevliga stämningen.

7. (a) 31 nya rare Magic-kort har släppts. Vissa samlare har lyckas få tag på 6 nya kort. Kan det hända att varje par av kort finns hos exakt en samlare och varje par av samlare finns exakt ett kort som båda har?

(b) På en skola går 121 gymnasieelever. Enligt skolans regler ska exakt 40 personer delta i en klubb. Visa att det är möjligt att varje par av klubbar har exakt 13 gymnasieelever gemensamt.

Dualitet

Definition. Ett projektivt plan består av en uppsättning linjer, en uppsättning punkter och en relation mellan punkterna och linjerna:

1. Givet två distinkta punkter finns det exakt en linje som går igenom båda.
2. Givet två distinkta linjer finns det exakt en punkt som hör till båda.
3. Det finns fyra punkter så att ingen linje innehåller fler än två av dem.

8. Jämför denna definition med den tidigare definitionen.

9. (**) En mängd punkter är givna i det euklidiska planet, som inte alla ligger på en linje. Visa att det finns en linje som går genom exakt två punkter.

10. En mängd linjer är givna i det euklidiska planet, så att inga två linjer är parallella och så att inte alla linjer skär varandra i en punkt. Visa att det finns en punkt som ligger på exakt 2 av de givna linjerna. Hur kan man bevisa denna uppgift genom att använda resultatet från den tidigare uppgiften?

11. Ta någon av de projektiva konfigurationerna vi känner till (till exempel Steiners definition av ett kägelsnitt) och byt linjer och punkter. Vad får man då?

5. Linjär algebra

5.1 Linearitet

1. (Lagrange interpolation)

(a) Konstruera ett polynom av grad n som antar värdet 0 i punkterna $x_1, x_2, \ldots, x_n$ och värdet 1 i punkten x_0.

(b) Konstruera ett polynom av grad högst n som antar värdena $y_0, y_1, \ldots, y_n$ i punkterna $x_0, x_1, \ldots, x_n$.

2. (Kinesiska restsatsen) För parvis relativt prima m_i och godtyckliga rester r_i så finns det ett tal X så att $X \equiv r_i \pmod{m_i}$.

3. **(a)** Det finns 17 lådor. I en av lådorna ligger ett mynt, alla andra lådor är tomma. Man får välja 11 av lådorna, vilka man vill, och lägga till ett mynt i var och en av dem. Visa att man kan få lådorna att innehålla lika många mynt genom att använda sådana operationer.

(b) Det finns 17 lådor. I några av lådorna ligger det ett antal mynt. Man får välja 11 av lådorna, vilka man vill, och lägga till ett mynt i var och en av dem. Visa att man kan få lådorna att innehålla lika många mynt genom att använda sådana operationer.

4. **(a)** En etta och $p-1$ nollor är placerade runt en cirkel. Under ett drag så drar man bort talets vänstra granne från varje tal i cirkeln. Visa att efter några drag så kommer alla talen att bli delbara med p.

(b) p heltal är placerade runt en cirkel (p är ett primtal). Under ett drag så drar man bort talets vänstra granne från varje tal i cirkeln. Visa att efter några drag så kommer alla talen att bli delbara med p.

(c) p heltal är placerade runt en cirkel (p är ett primtal). Under ett drag så väljer man ett tal k och drar bort talets granne nummer k från vänster från varje tal i cirkeln. Visa att efter några drag så kommer alla talen att bli delbara med p.

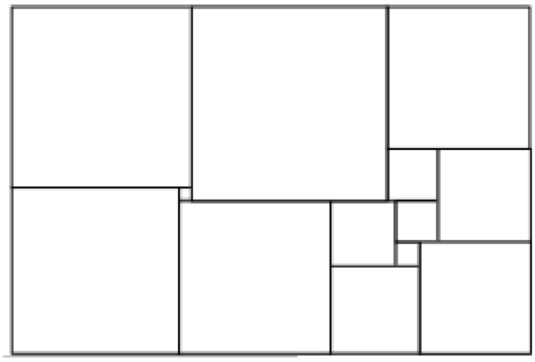
5. Runt en cirkel står 128 heltal. På ett drag ersätts alla talen (samtidigt) med summan av dessa två grannar. Visa att alla talen kommer att bli jämna efter några drag.

6. I varje ruta på en 100×100-tabell står det antingen ett $+$ eller ett $-$. På ett drag får man invertera tecknen i en hel rad och en hel kolumn. Kan man få alla möjliga uppsättningar med tecken om man alla rutorna innehåller plus från början?

7. I en 4×4-tabell pågår ”Game of Life” enligt följande regler. Varje ruta är antingen död eller levande från början. I varje iteration uppdateras det: om en ruta hade ett udda antal levande grannar (med angränsande sida), så kommer den att leva, annars dör den. Bestäm den största perioden för alla möjliga startlägen.

5.2 Ekvationssystem

1. På bilden nedan är en rektangel som är indelad i kvadrater. Man vet att den minsta kvadratens har en sida som är 3 mm lång. Bestäm storlekarna på de övriga kvadraterna.



Definition. Ett linjärt ekvationssystem (LES) sägs att vara på *trappstegsform* om den är skriven på formen:

$$\begin{cases} b_{11}x_1 + \dots \dots + b_{1n}x_n = d_1 \\ b_{2k}x_k + \dots \dots + b_{2n}x_n = d_2 \\ b_{3l}x_l + \dots \dots + b_{3n}x_n = d_3 \\ \dots \\ b_{rs}x_s + \dots + b_{rn}x_n = d_r \\ 0 = d_{r+1} \\ \dots \\ 0 = d_N \end{cases}$$

där $b_{11}, b_{2k}, b_{3l}, \dots, b_{rs} \neq 0$ är konstanter, $1 < k < l < \dots < s$, och $x_1, x_2, \dots, x_n$ är variabler.

2. Hur löser man ett LES på trappstegsform? Hur många lösningar (dvs uppsättningar $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ som uppfyller alla ekvationerna) kan det ha?

Definition. Två LES som har samma uppsättning variabler kallas för *ekvivalenta* om de har samma lösningsmängd.

Definition. Betrakta följande elementära operationer som man kan göra med LES:

EO1 Till en av ekvationerna addera en annan ekvation multiplicerat med ett tal.

EO2 Multiplicera en ekvation med ett nollskilt tal.

EO3 Byt plats på två av ekvationsraderna.

3. Om ett LES fås av ett annat LES genom EO1-3, så är dessa LES ekvivalenta.

4. **Sats (Gauss metod).** Genom att använda EO1-3 så kan ett LES fås på trappstegsform.

5. **(a)** Vilka möjliga antal lösningar kan ett LES ha ?

(b) Vilka antal lösningar kan ett LES som har fler variabler än ekvationer ha?

(c) Hur många (EO-)operationer (linjärt, kvadratiskt, exponentiellt antal) krävs för att garanterat få ett $n \times n$ LES att vara på trappstegsform?

Definition. Ett *homogent* LES (*HLES*) är ett LES där alla konstanta termer är lika med noll.

6. **Sats.** Ett HLES där det finns fler variabler än ekvationer har en nollskild lösning.

7. **Sats (Fredholms alternativ).** Låt ett LES ha lika många ekvationer som variabler. Då gäller ett av följande fall:

(1) Detta LES har exakt en lösning för varje uppsättning av konstanta termer.

(2) Det finns uppsättningar av konstanta termer då LES:et inte har någon lösning och det finns uppsättningar av konstanta termer då LES:et har oändligt många lösningar.

En omformulering. Om ett ekvationssystem med n variabler och n ekvationer har exakt en lösning för någon uppsättning av konstanta termer, så kommer den att ha exakt en lösning för varje uppsättning av konstanta termer.

8. **Sats.** Om ett LES med rationella koefficienter och dito konstanta termer har exakt en (reell) lösning, så är denna lösning även rationell.

9. **Sats.** Om ett LES med heltalskoefficienter och dito konstanta termer har någon (reell) lösning, så har den även en rationell lösning.

10. Ett LES reduceras till trappstegsform på flera olika sätt. Kommer antalet fria variabler alltid vara samma?

11. $\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1 \\ \frac{1}{2}x_1 - x_3 = 1 \\ x_1 + 9x_2 - 2x_3 = 17 \end{cases}$

Skriv ner en generell lösning för det givna LES:et.

12. Det finns ett 5×5 HLES utan koefficienter i vänsterleden. Två personer turas om att skriva in de saknade koefficienterna. Visa att första spelaren kan garantera att systemet har en nollskild lösning när det är färdigt.

13. **Diskreta värmeledningsekvationen.**

(a) I varje ruta på yttersta randen av en rutig rektangel står ett tal. Visa att man kan skriva in tal i alla de inre rutorna så att varje tal i en inre ruta blir lika med medelvärdet av sina grannar (varje ruta har som mest 4 grannar). Visa även att detta går att göra på endast ett sätt.

(b) Tolka problemet fysikaliskt. Varför blir fysiklösningen "fel"?

(c) Lösa problemet om rutorna har 8 grannar.

(d) Generalisera problemet för icke-rektangulära rutiga figurer med "hål" och även figurer i tre dimensioner.

(e) Formulera och lös problemet för en godtycklig sammanhängande graf.

14. Det finns 10 bananer som väger lika mycket och en balansvåg utan vikter. Visa att man inte kan bevisa att bananerna väger lika mycket på färre än 9 vägningar. Bananernas vikter är: **(a)** reella tal **(b)** positiva tal **(c)** positiva heltal.

15. Det finns 101 kor. Om man utesluter en valfri kossa, så kan alla de resterande delas upp i två flockar som har samma storlek och samma sammanlagda vikt. Visa att alla kossorna väger lika mycket ifall deras vikter är:

(a) heltal **(b)** rationella tal **(c)** reella tal **(d)** komplexa tal.

16. Ferdinand har 10 äpplen, varje äpple väger ett reellt positivt antal gram. Han gjorde några vägningar med dem på en balansvåg och fick likhet varje gång. Visa att Ferdinand kan skriva ett pris på varje äpple i positivt heltal kronor så att varje vägning som skedde hade även lika sammanlagda pris på de två skålarna.

17. I en regelbunden 17-hörning har några diagonaler dragits. De skär inte varandra, inte ens i hörnen. Sedan satte man ut riktningar på dessa diagonaler. Visa att summan av vektorerna man skapat inte är lika med $\overrightarrow{0}$.

18. På sträckan $[0,\ 1]$ har man markerat ändpunkterna samt ett antal inre punkter. Varje inre markerad punkt visade sig ligga exakt i mitten på en sträcka vars ändar också är markerade. Visa att alla de markerade punkterna är rationella.

5.3 Linjära rum

Låt K vara en kropp (dess element kallar vi för tal eller skalärer), och V en mängd (dess element kallar vi för vektorer). Låt multiplikationen mellan skalärer och vektorer vara definierad, liksom addition av vektorer (i båda fallen får vi en vektor som resultat).

Definition. V är ett *linjärt rum* (eller ett *vektorrum*) *över* K, om följande villkor är uppfyllda: additionen är associativ och kommutativ, det finns en noll-vektor, för varje vektor finns det en motsatt vektor och följande gäller för multiplikationen mellan vektorer och tal

1. $\alpha(\beta v) = (\alpha\beta)v$.
2. $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$.
3. $\alpha(v + w) = \alpha v + \alpha w$.
4. $1 \cdot v = v$.

Exempel

1. Mängden av vektorer i ett plan eller ett rum.
2. Mängden av polynom av grad högst n.
3. Mängden av lösningar till ett HLES.
4. Tal på formen $a + b\sqrt{2}$ där $a, b \in \mathbb{Q}$ är ett linjärt rum över $\mathbb{Q}$.
5. Mängden av listor av längd n som består av 0:or och 1:or och $1 + 1 = 0$.

Definition. En *linjär kombination* av vektorer $v_1, v_2, \ldots, v_k$ är en summa på formen $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_k v_k$ där α_i är tal.

Definition. En uppsättning vektorer $v_1, v_2, \ldots, v_k$ kallas för *linjärt oberoende* om dess linjära kombination är lika med nollvektorn om och endast om alla koefficienterna α_i är lika med noll.

1. En uppsättning med vektorer är linjärt oberoende om och endast om ingen av vektorna i uppsättningen kan uttryckas som en linjär kombination av de övriga.

Definition. En uppsättning med vektorer $v_1, v_2, \ldots, v_k$ *spänner upp* det linjära rummet om varje vektor i rummet kan uttryckas som en linjär kombination av vektorerna i uppsättningen.

R Varje deluppsättning av en linjärt oberoende uppsättning är också linjärt oberoende. Varje utökning av en uppsättning som är uppspännande är också uppspännande.

Definition. En uppsättning med vektorer kallas för en *bas* om den är linjärt oberoende och uppspännande.

2. En uppsättning med vektorer $v_1, v_2, \ldots, v_k$ kommer vara en bas om och endast om för varje vektor v så finns det exakt en uppsättning med tal $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ sådan att $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_k v_k$.

3. Om man ta bort en vektor från ett uppspännande system som kan uttryckas med hjälp av de andra vektorerna, så kommer systemet att förbli uppspännande.

4. Från varje ändligt uppspännande system så kan man ta bort några (eventuellt noll) vektorer så att de vektorna som återstår bildar en bas.

5. Om man till en linjärt oberoende uppsättning lägger till en vektor som inte kan uttryckas som en linjär kombination av vektorerna i uppsättningen så kommer uppsättningen att förbli linjärt oberoende.

6. Om ett rum har en ändlig uppspännande uppsättning, så går det att utöka varje linjärt oberoende uppsättning till en bas.

R Egentligen behövs inte existensen av en ändlig uppspännande uppsättning, men livet blir enklare om det gör.

7. I varje linjärt oberoende uppsättning finns det som mest så många vektorer som i en godtycklig uppspännande uppsättning.

Definition. Dimensionen för ett linjärt rum V är antalet vektorer i dess bas (om detta är ett ändligt tal). Det betecknas $\dim V$.

8. Bevisa att definitionen är väldefinierad, det vill säga att

(a) två valfria baser för samma rum innehåller alltid samma antal vektorer.

(b) om $\dim V = n$ så utgör varje linjärt oberoende uppsättning av n vektorer en bas.

(c) om $\dim V = n$ så utgör varje uppspännande uppsättning av n vektorer en bas.

(d) om $\dim V = n$ så innehåller varje linjärt oberoende uppsättning som mest n vektorer.

(e) om $\dim V = n$ så innehåller varje uppspännande uppsättning som minst n vektorer.

Problem

9. På Mattekollo finns 20 deltagare. David vet hur långa alla är och har sparat det i en hemlig fil på sin dator. Valentina vill ta reda på allas längder. För detta kan hon säga talen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{20}$ (alla talen måste vara positiva) och då kommer David att berätta resultatet $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_{20} v_{20}$ för henne där $v_1, \ldots, v_{20}$ är deltagarnas längder (reella tal).

(a) David går bara med på att svara på 19 sådana här frågor. Visa att Valentina inte alltid kan bestämma hur långa alla är.

(b) Valentina är besviken, men hon vill åtminstone ta reda på hur lång Neo är. Hur många frågor av typen ovan behöver hon ställa?

(c) Valentina får en ny chans av David nästa dag och då får hon ställa 21 frågor. Visa att resultatet av en av frågorna kan man förutspå om man kan svaren på alla de övriga frågorna.

10. **(a)** En graf är given. Betrakta alla färgläggningar där kanterna färgas i rött eller blått sådana att varje nod har ett jämnt antal röda kanter ifrån sig. Visa att antalet sådana färgläggningar är en tvåpotens.

(b) Betrakta färgläggningar som i förra deluppgiften där det från varje nod utgår antal röda kanter av en fix paritet. Visa att antalet sådana färgläggningar är en tvåpotens eller så finns det inga alls.

11. Det finns 8 flaskor med vin, varje flaska innehåller en egen vinsort. Varje flaska är full till åtminstone 90%. Det går bra att hälla över vin mellan flaskorna, men man får aldrig hälla ut vin. Varje gång man häller över vin så blandas det nya vinet eller den nya vinbladningen homogent. Går det att få två av flaskorna att innehålla exakt samma vinblandning?

12. I varje ruta på ett schackbräde skriver man in ett reellt tal. På ett drag är det tillåtet att lägga till α till varje tal i en 3×3 eller en 4×4-kvadrat (α kan variera mellan dragen). Går det att få alla möjliga uppsättningar med reella tal på schackbrädet med hjälp av dessa operationer?

13. I en klass går k tjejer och $n > k$ killar. Några av killarna tycker om några av tjejerna. Visa att det finns en icke-tom mängd med killar så att varje tjej i klassen gillas av ett jämnt antal killar från den mängden.

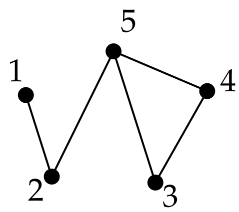
14. Låt A_1, A_2, $\ldots$, A_{n+1} vara icke-tomma delmängder utav en mängd med n element. Visa att man kan välja två disjunkta icke-tomma mängder med index $\{i_1, \ldots, i_k\}$ och $\{j_1, \ldots, j_\ell\}$, så att

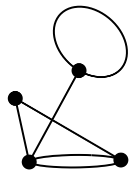
$$A_{i_1} \cup A_{i_2} \cup \cdots \cup A_{i_k} = A_{j_1} \cup A_{j_2} \cup \cdots \cup A_{j_\ell}.$$

6. Grafteori

6.1 Grafteori

En **graf** består av en uppsättning **noder**, och en uppsättning **kanter** som ansluter noderna till varandra. Här är två exempel:



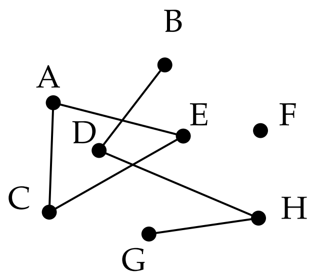


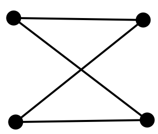
I det första exemplet finns fem noder numrerade med 1, 2, 3, 4 och 5, och fem kanter som går mellan noderna $(1,2)$, $(2,5)$, $(5,3)$, $(3,4)$ respektive $(4,5)$. Just denna graf är vad vi kallar för **enkel**. En **enkel** graf har inga kanter som går från en nod till sig själv, och som mest en kant mellan varje par av noder. Den högra grafen är däremot inte enkel. Kanter som i en icke-enkel graf går från en nod till sig själv kallas för **loopar** eller **öglor**. Om inget annat står angivet kommer vi alltid jobba med enkla grafer.

En graf kan ha oändligt många noder, men om inget annat står angivet så kommer vi arbeta med ändliga grafer här.

Antalet kanter som är kopplade till en nod kallas för nodens **grad**. I det första exemplet ovan så har noderna 1, 2, 3, 4 och 5 graderna 1, 2, 2, 2 respektive 3.

Om det går att ta sig mellan vilka par av noder som helst genom att gå längs kanter i en graf så säger vi att den är **sammanhängande**. Vi kan dela in en graf i ett antal **komponenter**, där två noder ingår i samma komponent om man kan gå mellan dem längs kanter i grafen. En komponent är alltså en sammanhängande del av en graf. Båda exemplen ovan har en komponent, eftersom de är sammanhängande. Däremot har den vänstra grafen nedan tre komponenter bestående av noderna ACE, BDGH respektive F.

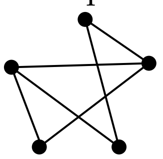


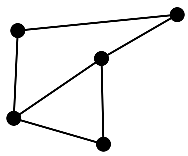


En **väg** mellan två noder *a* och *b* i en graf är en sekvens av noder som börjar med *a* och slutar med *b*, och där intilliggande noder i sekvensen är kopplade med en kant. Till exempel är BDHG en väg i grafen ovan. Om en väg börjar och slutar i samma nod (och passerar minst en annan nod) kallas det för en **cykel**, till exempel cykeln AECA i grafen ovan. En graf som saknar cykler kallas för **acyklisk**. Vi kommer också benämna en graf som bara är en enda cykel som en **cykel(-graf)**, till exempel grafen till höger ovan.

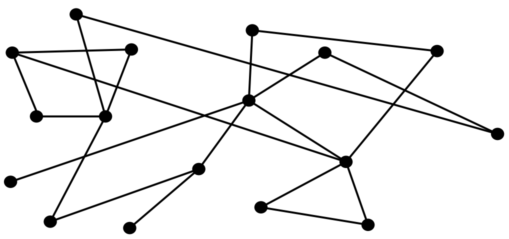
Om alla noder i en graf har samma grad säger vi att den är **regelbunden**. Till exempel är grafen till höger ovan regelbunden, eftersom alla noder har grad 2.

En viktig poäng är att en graf är oberoende av hur vi ritar den samt hur vi namnger våra noder. Den beror bara på antalet noder samt hur de är sammankopplade. Två grafer som bara skiljer sig på hur vi namngett noderna kallas för **isomorfa**. Till exempel är följande två grafer isomorfa:





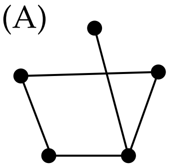
1. Hur många noder respektive kanter har följande graf? Vad har de olika noderna för grad?



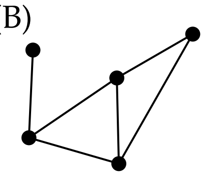
2. En polyeder kan betraktas som en graf, där hörnen utgör noder och kanterna utgör kanter. Rita grafen för en **(a)** tetraeder **(b)** kub **(c)** ikosaeder. Hur borde motsvarande graf för en fyrdimensionell kub se ut?

3. Vilka av följande grafer är isomorfa?

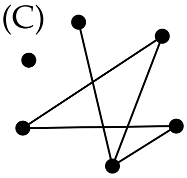
(A)



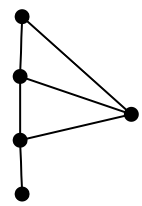
(B)



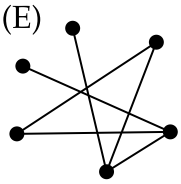
(C)



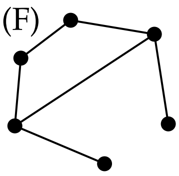
(D)



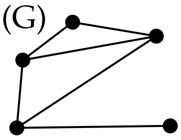
(E)



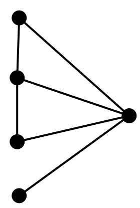
(F)



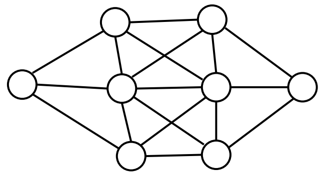
(G)



(F)



4. Placera siffrorna 1 till 8 i ringarna nedan så att siffrorna i noder som är kopplade med en kant skiljer sig med minst 2.



5. Finns det en graf så att summan av alla noders grader är 2019?

6. Hitta en regelbunden graf med 8 noder, där varje nod har grad 3. Finns det en sådan graf med 9 noder?

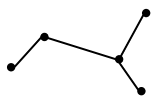
7. En graf som är sammanhängande och saknar cykler kallas för ett **träd** (se exempel nedan).

(a) Visa att om vi tar bort en kant i ett träd så är grafen inte längre sammanhängande.

(b) Visa att om vi lägger till en kant i ett träd så bildas en cykel.

(c) En nod som har grad ett i ett träd kallas för ett **löv**. Varför måste varje träd med minst två noder innehålla ett löv?

(d) Visa att antalet kanter i ett träd med n noder är $n-1$.



8. En sekvens med tal $d_1 \leq d_2 \leq \ldots \leq d_n$ är given. Visa att det finns ett träd vars noder har grader exakt $d_1, d_2, \ldots, d_n$ om och endast om alla $d_i \geq 1$ och $d_1 + d_2 + \ldots + d_n = 2n - 2$.

9. En **komplett graf** med n noder är en graf där alla par av noder är sammankopplade med exakt en kant.

(a) Hur många kanter finns i en komplett graf?

(b) Hur många kanter kan en graf med n noder ha som mest, utan att vara sammanhängande?

10. Komplementet till en enkel graf G är en graf G' med samma uppsättning noder, men där det finns en kant mellan ett par av noder om och endast om det inte finns en kant i G. Existerar det en osammanhängande graf vars komplement är osammanhängande?

11. Tio personer träffas på ett seminarium om grafteori. Efteråt visar det sig att varje person skakade hand med precis fem andra personer. Är det möjligt att grafen är osammanhängande?

12. En myra kryper på en dodekaeders kanter och den vänder aldrig om. Myran slutar i samma punkt som den börjar. Det visar sig att rutten går igenom varje kant exakt två gånger. Visa att myran passerar någon kant i samma riktning båda gångerna.

13. Givet är en enkel graf G. Låt $f(v)$ vara det största antalet noder man kan välja som är grannar till v, men så att inga av dem är grannar med varandra. Visa att $f(v_1) + f(v_2) + \ldots + f(v_n) \leq n^2/2$.

14. $2n$ personer ska sitta runt ett bord. Vi vet att varje person har som mest $n-1$ fiender, och att två fiender under inga omständigheter får sitta bredvid varandra. Är detta krav alltid möjligt att uppfylla? (Om A är B:s fiende så är B också A:s fiende.)

15. I en liten stad visar det sig att varje par av personer har exakt en gemensam vän. Visa att det måste finnas en person - politikern - som känner alla andra i stan.

6.2 Graffärgläggningar

1. Lös följande sudoku.

			1
4			
			2
1			

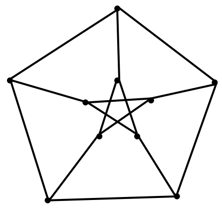
2. Ett antal linjer är dragna i planet. Visa att:

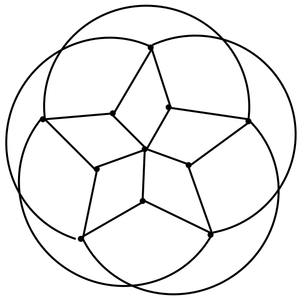
(a) områdena som linjerna delar in planet i kan färgläggas med två färger så att inga två angränsande ytor har samma färg.

(b) om inga tre linjer skär varandra i en punkt så kan vi färga skärningspunkterna i tre färger så att inga två punkter som ligger intill varandra på samma linje har samma färg.

Definition. Vi definierar det **kromatiska talet** för en graf som det minsta talet k sådant att grafens noder kan färgläggas med k färger utan att några angränsande noder har samma färg. Det kromatiska talet hos grafen G betecknas med $\chi(G)$.

3. Bestäm det kromatiska talet till följande grafer:





4. Vad är det kromatisk talet hos

(a) en komplett graf med n noder?

(b) en cykelgraf med n noder?

(c) ett träd med n noder?

5. En **bipartit** graf är en graf med kromatiskt tal 2. Visa att en graf är bipartit om och endast om den inte innehåller en udda cykel.

6. Visa att om alla noder i en graf har gradtal som mest d så är det kromatiska talet som mest $d+1$. Visa att om en av noderna tas bort så blir det kromatiska talet som mest d.

7. En graf G definieras på följande sätt: som noder väljer vi alla heltal mellan 1 och 100, och två noder a och b har en kant mellan sig om deras summa är ett primtal. Bestäm $\chi(G)$.

8. I ett oändligt rutnät betraktas två rutor som grannar om de har manhattanavstånd *exakt* två. Vilket är det kromatiska talet för grafen som bildas?

9. Du har fått i uppgift att anställa vakter som ska vakta ett museum. Givetvis vill du inte använda så många vakter som möjligt. Om museet är en polygon med n hörn och sidor som inte skär varandra, visa att det räcker att anställa $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ vakter.

10. En oändlig graf definieras på följande sätt: som noder väljer vi punkter i planet, och en kant går mellan två punkter om de är på avstånd ett. Visa att grafen har kromatiskt tal minst fyra och max sju.

11. Konstruera en oändlig graf vars kromatiska tal är ∞, men där alla noders gradtal är ändliga.

12. Visa att för en graf G med n noder och dess komplement G' så gäller att

(a) $\chi(G) + \chi(G') \leq n+1$

(b) $\chi(G)\chi(G') \geq n$

13. En (n,k)-Knesergraf defineras på föjande sätt: Låt noderna vara alla delmängder till $\{1,2,\ldots,n\}$ med k element, där en kant går mellan två noder om de är disjunkta. Visa att det kromatiska talet för en Knesergraf är som mest $n-2k+2$.

14. (Brook's sats) Visa att om en graf G där alla noder har grad som mest d inte kan färgas med d färger så är den antingen komplett eller en udda cykel. (Ledtråd: använd uppgift 6 som startpunkt!)

15. Låt $P_G(t)$ vara antalet sätt att färglägga grafen G med t färger. Visa att $P_G(t)$ är ett polynom i t. ($P_G(t)$ kallas för det **kromatiska polynomet**.)

6.3 Planära grafer

Definition. En **planär graf** är en graf som kan ritas på papper utan att några kanter skär varandra. I en planär graf så kommer kanterna ringa in avgränsade områden, så kallade **ytor**.

1. Rita grafen till en

(a) tetraeder

(b) kub

(c) ikosaeder

utan att några kanter korsar varandra. Hur många noder, kanter och ytor får du? Förklara varför grafen till alla polyedrar är planära.

Sats 6.1. **(Eulers formel)** I en sammanhängande planär graf så är $v - e + f = 2$, är v är antalet noder, e är antalet kanter och f är antalet ytor (eller områden). Notera att även den oändliga ytan som omger hela grafen räknas som en yta.
En viktig poäng är att de flesta planära grafer kan ritas på flera olika sätt, eftersom en graf inte har något att göra med hur vi ritar den, och vilka ytor vi får varierar. Eulers formel gäller dock för alla möjliga sätt att rita en planär graf så länge inga kanter korsar varandra.

2. Visa att $v - e + f$ inte ändras när man lägger till en kant i en planär graf. Bevisa med hjälp av denna observation, eller på något annat sätt, Eulers formel.

3. I ett land finns det 2020 städer, som är sammankopplade med vägar som inte korsar varandra.

(a) Vägarna avgränsar ett antal områden. Hur många sådana områden kan det finnas som mest?

(b) Hur många kanter kan det finnas som mest, i grafen som bildas?

4. Visa att $3v - 6 \geq e$ i en planär graf med minst 3 noder.

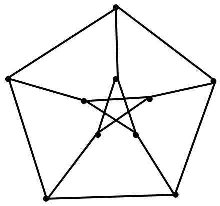
5. Visa att en komplett graf med fem noder inte är planär.

6. Tre hus behöver både vatten-, ström- och värmeledningar kopplade till sig, och de ska dras från vatten-, el- respektive värmeverket. För att kunna mäta hur mycket var och en använder så går inte distributörerna med på att dra några ledningar till ett hus genom ett annat. Man får inte heller dra en vattenledning genom värmeverket eller någon ledning genom ett verk som den inte tillhör - det hade ju varit absurt! Dessutom får inga ledningar korsa varandra, eftersom det skulle leda till enorm förvirring.

(a) Går detta att genomföra?

(b) Går det att genomföra om husen ligger på en donut?

7. Är följande graf planär?



8. I en komplett graf med 11 noder är vissa kanter färgade röda och andra blåa. Visa att om man tar bort antingen de röda eller de blåa kanterna så kommer man lämnas med en icke-planär graf.

9. Visa att det bara finns fem platonska kroppar.

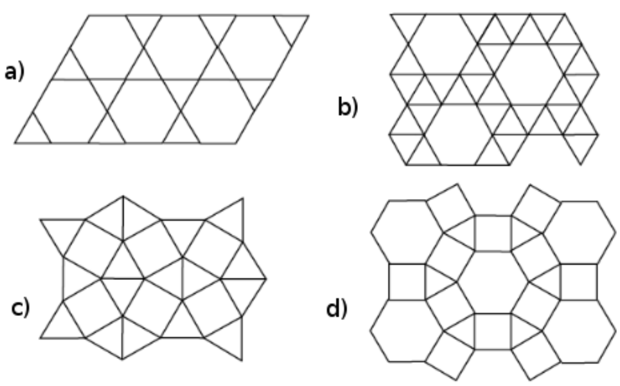
> **Definition.** En väg som går genom varje kant i en graf exakt en gång kallas för en **Eulerväg**. Om vägen dessutom börjar och slutar på samma ställe så kallas det för en **Eulercykel**.

10. Visa att om en sammanhängande graf har en nod av udda grad så finns ingen Eulercykel. Gäller det omvänt att om en sammanhängande graf bara har noder av jämn grad, så finns det en eulercykel?

11. Visa att om en planär graf har en Eulercykel så kan dess ytor färgas med två färger, utan att några intilliggande ytor har samma färg.

6.4 Femfärgssatsen

1. Färglägg följande bilder med så få färger som möjligt, så att inga två angränsande ytor har samma färg.



2. Förklara hur kartorna ovan kan betraktas som planära grafer.

Definition. Den **duala** grafen till en planär graf fås genom att betrakta ytorna som noder, och koppla ihop ytor som angränsar till varandra med en kant. Notera att den duala grafen till en given graf inte är unikt bestämd utan beror på hur vi ritar grafen.

3. Förklara varför dualen till en planär graf också är planär. Hur förhåller sig antalet noder, kanter och ytor mellan de två graferna? Bekräfta att Eulers formel gäller även i den duala grafen till en sammanhängande graf.

4. Hitta ett exempel på en planär graf som har olika dual beroende på hur man ritar den?

5. Förra gången visade vi att $3v - 6 \geq e$ i en planär graf, där v är antalet noder och e är antalet kanter. Använd detta för att visa att det i en planär graf finns en nod som har grad max 5.

6. Visa att alla planära grafer kan färgläggas med max 6 färger, utan att några intilliggande noder har samma färg. Varför innebär detta att alla kartor kan färgas med sex färger?

7. Visa att det räcker med fem färger i problemet ovan.

Sats 6.2. **(Fyrfärgssatsen)** Fyrfärgssatsen säger att alla planära grafer kan färgläggas med fyra färger utan att några angränsande noder har samma färg. Satsen framlades 1852 av Francis Guthrie, men ingen lyckades bevisa den förrän 1976, då Kenneth Appel och Wolfgang Haken reducerade det till ändligt många fall som kunde kontrolleras med en dator. Under lång tid var det omdebatterat om beviset skulle accepteras eller inte, ingen människa kunde kontrollera de nästan 2000 fallen som återstod. Men idag är de flesta överens om att satsen är bevisad.

Extraproblem

Definition. Givet en sammanhängande graf definierar vi ett uppspännande träd till grafen som ett träd som innehåller alla noder i grafen och en delmängd av kanterna.

8. I den här uppgiften får du bevisa Eulers formel på ett annat sätt. Givet är en planär sammanhängande graf G. Låt T vara kanterna i ett uppspännande träd till G, vilket som helst, och låt T' vara kanterna som inte ingår i T.

(a) Visa att T' utgör kanterna i ett uppspännande träd till den duala grafen till G.

(b) Visa Eulers formel med hjälp av (a).

9. Vi vill färga kanterna i en graf så att inga två som är kopplade till samma nod har samma färg. Låt d vara det största gradtalet i grafen.

(a) Visa att vi behöver minst d färger.

(b) (Vizings sats) Visa att det räcker med $d + 1$ färger.

7. Fysik

7.1 Fysik i problemlösning - Olikheter genom kortslutning

I en elektrisk krets mäter vi typiskt tre saker:

1. **Ström**, som vi betecknar med I. Detta är ett mått på antalet elektroner som passerar per sekund.

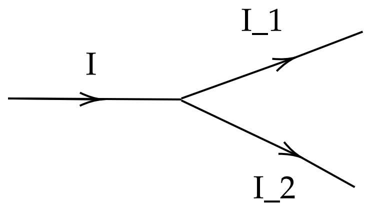
2. **Spänning**, som vi betecknar med U. Det är spänningen som driver elektronerna framåt. Ska man vara exakt så är det ett mått på skillnaden i elektrisk potentiell energi mellan två punkter. Som vi kommer se i nästa avsnitt så hör skillnad i potential alltid ihop med en kraft. I detta fall är det just den kraft som driver elektronerna.

3. **Resistans**, som vi betecknar med R. Detta är en mått på hur mycket elektronerna bromsas av komponenterna i kretsen.

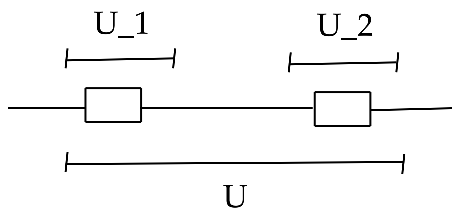
Om man ökar spänningen så kommer strömmen typiskt öka. Detta borde inte vara så förvånande. Men vad som är mindre uppenbart är att i en given krets så är förhållandet faktiskt linjärt för små spänningar, ett resultat som är mer känt som **Ohms lag**. Ohms lag säger att $U = RI$ i en elektrisk krets. Resistansen är alltså proportionalitetskonstanten i sambandet mellan spänning och ström i en krets.

Utöver Ohms lag så behöver man känna till ytterligare två saker:

1. Om en ström delar upp sig i en nod så kommer summan av strömmarna som går in vara lika med summan av strömmarna som går ut. Detta borde inte heller vara så förvånande, eftersom strömmen var ett mått på hur många elektroner som passerar per sekund, och vi kan ju inte få trafikstockning någonstans! I bilden nedan är alltså $I = I_1 + I_2$.



2. Summan av skillnaderna i spänning i en krets är lika med den totala spänningen. Detta borde inte heller vara så förvånande, eftersom spänning ju var skillnaden i potentiell energi mellan två punkter. I bilden nedan är alltså $U = U_1 + U_2$.



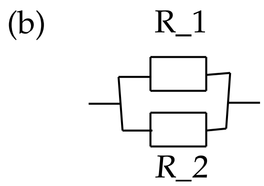
Slutligen kommer vi använda att om man lägger till mer ledningstråd i en krets så kan resistansen inte öka.

1. Använd lagarna ovan för att visa att om två elektriska motstånd kopplas som på bilderna nedan, så uppfyller ersättningsresistensen R följande samband:

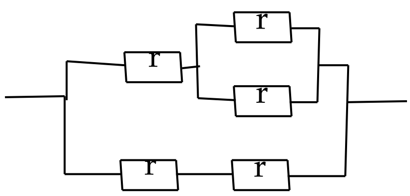
(a) $R = R_1 + R_2$

(b) $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$

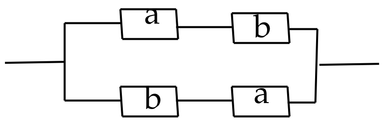
(Ersättningsresistensen i en krets ges av $\frac{U}{I}$, där U är den totala spänningen och I är den totala strömmen. Denna kommer vara konstant och oberoende av hur stor spänning vi lägger över kretsen enligt Ohms lag).



2. Bestäm ersättningsresistansen i kretsen nedan.



3. Visa genom att lägga till en lämplig ledningstråd i följande kopplingsschema att $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b}$.



4. Visa att $\frac{1}{\frac{1}{a+b} + \frac{1}{c+d}} \geq \frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{c}} + \frac{1}{\frac{1}{b} + \frac{1}{d}}$.

5. Försök visa att $\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}}$ genom att betrakta ett lämpligt kopplingsschema.

7.2 Fysik i problemlösning - Minimum genom mekanik

Enligt Newtons andra lag så uppfyller kraften på ett objekt sambandet $F = ma$, där F är kraften, m är massan och a är accelerationen. Detta betyder att om ett objekt, eller flera objekt, befinner sig i vila så måste alla krafter som verkar på dem ta ut varandra. Den **resulterande kraften** måste vara 0.

Men det visar sig också att många fysikaliska system uppfyller ett speciellt krav, nämligen att den mekaniska energin är bevarad. Vi introducerar en så kallad **potentiell energi** som beror på objektens position, och **rörelseenergin** som ges av $\frac{mv^2}{2}$ där m är massan och v är hastigheten. Man kan visa att bevarandet av mekanisk energi följer från Newtons lag om vi väljer att den potentiella energin ska vara minus derivatan av kraften med avseende på position, givet att kraftfältet är vad vi kallar för konservativt. Vad som kommer först kan man säkert debattera, men det viktiga för oss är konsekvensen av detta, nämligen att något bara kan befinna sig i vila om den potentiella energin är i en minimi- eller maximipunkt! Annars kommer inte kraften, som alltså är derivatan av den potentiella energin, vara noll. Det är till och med bättre än så, om den potentiella energin är i en maximipunkt så kommer kraften vara riktad bort från denna punkt vid minsta förändring. Med andra ord så kommer väldigt många fysikaliska system automatiskt minimera en potentiella energin, eftersom kraften alltid är riktad i riktning mot minskande potentiell energi.

Detta kan vi utnyttja. Om vi vill lösa ett visst matematiskt problem om att minimera något, så är det enda vi behöver göra att komma på ett fysikaliskt system som har funktionen som vi vill minimera som potentiell energi, och sen låta fysiken göra jobbet!

Det kommer vara användbart att känna till några typiska fysikaliska system och deras potentiella energier samt motsvarande krafter:

- En **vanlig fjäder** har potentiell energi $\frac{kx^2}{2}$, där k är en konstant och x är fjäderns förlängning. Kraften från fjädern kommer vara minus derivatan av detta, alltså $-kx$.
- En **konstantspänningsfjäder** har potentiell energi kx, där k är en konstant och x är fjäderns förlängning. Kraften från fjädern kommer vara minus derivatan av detta, alltså $-k$.
- I ett **homogent gravitationsfält** (som på jorden när vi är nära jordytan) så har ett objekt på höjd h den potentiella energin mgh, där m är massan hos objektet och g är tyngdaccelerationen. Kraften som verkar på objektet kommer vara minus derivatan av detta, alltså $-mg$.

Notera att minustecknen i krafterna ovan ska tolkas som att riktningen på kraften är i riktningen som den potentiella energin minskar i. Det är också viktigt att tänka på att krafter har både en storlek och en riktning, så vi måste addera dem som vektorer.

1. Givet är en triangel ABC och en punkt P i triangeln.

(a) Visa att om summan $AP + BP + CP$ är minimal så är vinklarna APB, BPC och CPA alla lika stora.

(b) Visa att om summan $\sqrt{2}AP + BP + CP$ är minimal så är vinkeln BPC är rät.

2. Givet är en triangel ABC och en punkt P i triangeln. Visa att $AP^2 + BP^2 + CP^2$ är minimalt när P är skärningen mellan medianerna.

Definition. Givet två punkter F_1 och F_2 så definierar vi en ellips med fokuspunkter F_1 och F_2 som alla punkter P sådana att $PF_1 + PF_2 = k$, där k är någon konstant.

3. Placera en ellips på ett bord och borra två hål i fokuspunkterna. Häng vikter med massor m i rep som släpps genom vardera hål, och knyt fast de övre ändarna på repen i varandra och i ellipsen, så att knuten kan röra sig fritt och utan friktion runt ellipsen.

(a) Visa att den potentiella energin hos systemet är oberoende av vilken punkt vi väljer på ellipsen. Dra slutsatsen att systemet befinner sig i jämvikt.

(b) Visa att vinklarna mellan tangenten i punkten på ellipsen där repen sitter och de två repen är lika.

(c) Vad säger resultatet i uppgift **(b)** om vad som händer om vi skickar en ljusstråle från en fokuspunkt i en ellips och låter den reflekteras på insidan av ellipsen?

4. Två linjer ℓ_1 och ℓ_2 som möts i punkten P är givna, och dessa avgränsar en sektor av planet med spetsig vinkel. I denna sektor finns en cirkel ω. Visa att om X är punkten på ω som minimerar summan av avstånden till de två linjerna ℓ_1 och ℓ_2, så är tangenten till cirkeln ω i punkten X vinkelrät mot bisektrisen till ℓ_1 och ℓ_2.

5. Visa att om en ellips är inskriven i en triangel ABC, så att den tangerar alla sidor, så gäller att $\angle ABF_1 = \angle CBF_2$, och så vidare, där F_1 och F_2 är fokuspunkter (detta kallas för att F_1 och F_2 är isogonala konjugat).

6. En konvex tvådimensionell figur K är given i planet, och vi har ritat en triangel runt den som har minimal area. Visa, genom att fylla planet utanför triangeln med luft med tryck 1 och insidan av triangeln med vakuum, att K tangerar triangelns sidor i deras mittpunkter.

7. (*) Betrakta en ellips som tangerar båda koordinataxlarna och ligger i första kvadranten. Visa att avståndet från ellipsens centrum till origo inte beror på hur den är roterad.

Anmärkning. Egentligen finns det ingen fundamental skillnad mellan att lösa problemen ovan med hjälp av fysikaliska samband vi, och att helt enkelt ställa upp de matematiska sambanden och använda sig av analysens metoder. Och alla de fysikaliska lagarna som används kan man också visa rent matematiskt, men vi har hoppat över det här eftersom det är jobbigt. Poängen är alltså snarast att vi genom att dra nytta av det vi känner till från fysiken, kan använda den intuition vi får från verkliga livet och de matematiska verktyg som fysiken ger oss för att på ett mycket enklare sätt komma fram till en lösning. Till exempel så kan vi, istället för att resonera om derivator och gradienter, prata om krafter, vilket onekligen är mycket enklare och mer intuitivt!

8. Mattedrabbningar

8.1 Mattedrabbning lila grupp

1. Finns det ett tal som är delbart med 2020 och som innehåller lika många av var och en av de tio siffrorna?

2. Två punkter A och B ligger på en cirkel. Punkten C snurrar runt på cirkelns periferi. Bestäm alla möjliga lägen för punkten M om M är skärningspunkten av medianerna i triangeln ABC.

3. I en turnering spelar alla mot alla, och i varje match vinner exakt en person. Finns det, för varje k, en turnering sådan att för varje grupp av k spelare finns det en annan spelare som de alla förlorar mot.

4. I planet har man ritat en 100-hörning och markerat alla hörnen och alla sidornas mittpunkter. Genom dessa 200 punkter drog man parallella linjer så att två markerade punkter aldrig hamnade på samma linje. Kan avståndet mellan varje par av linjer närmast varandra alltid vara samma?

5. 100 stycken 1:or står på tavlan. På ett drag får man sudda bort ett tal och istället skriva upp två stycken hälften så stora tal. Visa att det kommer finnas 51 likadana tal på tavlan efter varenda drag.

6. En talföljd med positiva heltal konstrueras på följande sätt. $a_1 = 1$ och sedan kommer a_n vara lika med $a_{n-1} - 2$ om det talet inte har förekommit i följden förut och är positivt och lika med $a_{n-1} + 3$ annars. Visa att om a_k är ett kvadrattal för något k så är det lika med $a_k = a_{k-1} + 3$.

7. Det finns många likadana små enhetspapperskvadrater där man dragit båda diagonalerna. Sidorna på en kub med sidan 100 täcks helt av sådana kvadrater utan några överlapp. (Men det är möjligt att kvadraterna viks över och täcker delar av olika sidor på kuben eller är roterade). En skalbagge sätts i ett av hörnen på kuben. Den får bara krypa längs med papperskvadraternas diagonaler. Visa att den kan ta sig till något annat av kubens hörn.

8. Det finns två högar med stenar, 2020 i den första, 1729 i den andra. Två spelare turas om att göra drag. Varje drag får man ta bort en nollskild multipel av antalet stenar i en hög från den andra högen. Den som tar sista stenen från en av högarna vinner. Vem av spelarna har en vinnande strategi och hur ska den personen spela?

8.2 Mattedrabbning svart grupp

1. Det finns en lamptavla med 8×8 lampor. På ett drag får man invertera 15 lampor - alla i en rad och en kolumn. Vilket är det minsta antalet drag som behövs för att invertera alla lamporna på tavlan?

2. Låt $ABCD$ vara en tetraeder sådan att det finns en sfär som tangerar alla kanterna på den förutom AB. Visa att det finns en sfär som tangerar alla kanterna på den förutom CD.

3. Låt n vara ett heltal. Visa att om $m = 2 + 2\sqrt{1 + 12n^2}$ är ett heltal, då är m en kvadrat.

4. En kortlek innehåller $3^k + 1$ kort. Vi genomför upprepade gånger en perfekt riffle shuffle: alltså att vi delar högen på mitten och blandar så att vartannat kort kommer från övre halvan och vartannat från undre halvan utan att den inbördes ordningen i halvorna ändras. Vi ser dessutom till att det översta kortet alltid är det första kortet från den övre halvan. Hur många gånger behöver en sådan blandning genomföras för att vi ska komma tillbaka till ursprungsordningen?

5. Låt m och n vara udda relativt prima tal. Tag intervallet från 0 till mn på tallinjen och markera alla punkter som är delbara med m och alla som är delbara med n. De sträckor som man får färgas varannan svart och varannan vit. Visa att summan av de svarta längderna och de vita längderna skiljer sig med 1.

6. Visa att det inte finns något polynom i två variabler $P(x,y)$ sådant att kvadranten $(x,y) : x > 0, y > 0$ är lösningsmängden till olikheten $P(x,y) > 0$.

7. Tre cirklar med samma radier är inskrivna i hörnen A, B och C i triangeln ABC. Den fjärde cirkeln tangerar alla dessa tre cirklar externt. Visa att dess mittpunkt ligger på linjen som går igenom triangeln ABC:s inskrivna cirkels mittpunkt samt den omskrivna cirkelns mittpunkt.

8. En ny sorts schackpjäs - prinsen - får gå ett steg åt gången men bara åt höger, vänster, upp eller ner. Visa att om prinsen börjar i ett hörn av ett 8×8-schackbräde, och gå på en promenad som besöker varje ruta exakt en gång och slutar i startrutan, så är antalet horisontella drag inte samma som antalet vertikala.

II Lektionsmaterial programmering

9. Programmering med turtlegrafik

9.1 Turtle och grundläggande syntax

Programmeringen kommer ske i programmeringsspråket Python, ett språk med mycket enkel syntax. Kod skrivs i valfri utvecklingsmiljö (IDE - *integrated development environment*), men IDLE som medföljer Pythoninstallationen fungerar fint. Visual Studio Code är en annan IDE som har användbara funktioner som underlättar kodskrivning, som ni gärna får ladda ned (gratis). Om ni har en chrome book, eller inte vill ladda ner python på er dator, så kommer det fungera att använda `https://repl.it/languages/python3` också, men vi rekommenderar att ladda ner om ni kan.

Nedan följer ett antal tabeller med användbara operationer, först för turtlen men sedan också generellt. Ni kan titta på dessa för att bli påminda om hur kod skrivs i Python.

För att använda turtlar måste du först importera `turtle`-modulen: `import turtle`. För att skapa en padda, skriv `t = turtle.Turtle()`. Detta placerar en turtle mitt i ett fönster, med tänkta koordinataxlar x åt höger, y uppåt. Koordinater motsvarar pixlar. Variabeln `t` refererar nu till en sköldpadda. Kom ihåg att du måste skriva t.ex. `t.forward(100)`, med `t.` först för att datorn ska förstå att det är just turtlen du kallat `t` som ska påverkas (du kan ha mer än en turtle i världen samtidigt).

Tabell 9.1: Några användbara metoder för turtlen.

Metod	Kommentar	Exempel
turtle.Turtle()	*Skapar och returnerar en padda placerad i origo.* *Om det är första paddan skapas även världen.*	t = turtle.Turtle()
forward(n)	*Gå n pixlar framåt.*	
backward(n)	*Gå n pixlar bakåt.*	
left(n)	*Vrid n grader vänster.*	
right(n)	*Vrid n grader höger.*	
goto(x, y)	*Gå till position (x,y).*	
setx(x)	*Förflyttning i sidled.*	
sety(y)	*Förflyttning i höjdled.*	
setheading(n)	*Sätter riktning. 0 är i x-axelns, 90 i y-axelns riktning.*	t.setheading(180)
circle(radius)	*Gå i cirkel med angiven radie.*	
dot(radius, col)	*Rita en punkt med angiven radie och färg.*	t.dot(10, 'blue')
speed(n)	*Sätter farten.* *0 : snabbast, ingen animering* *1 : långsamt* *5* *9 : snabbt*	

Tabell 9.2: Några användbara funktioner för pennan.

Metod	Kommentar
pendown()	*Kommer att rita.*
penup()	*Kommer ej att rita.*
pensize()	*Returnerar pennans storlek.*
pensize(n)	*Sätter pennans storlek.*
pencolor(colorstring)	*Sätter pennans färg. Exempel: 'blue' eller '#32c18f'.* *Notera: det senare representerar Röd-Grön-Blå i* *hexadecimalt med två siffror (0-255)!*
fillcolor(colorstring)	*Sätter fyllningsfärg*
begin_fill()	*Börjar fylla figurer.*
end_fill()	*Slutar fylla figurer.*
clear()	*Tar bort allt paddan har ritat.*
showturtle()	*Gör paddan synlig.*
hideturtle()	*Gör paddan osynlig.*

Här finns också en länk till dokumentationen för turtlen (en exakt beskrivning av allt den kan göra och hur den gör det).
`https://docs.python.org/3.3/library/turtle.html?highlight=turtle`

Här kommer också en tabell med användbara matematiska operationer och hur man gör dem i python:

Tabell 9.3: Några användbara matematiska uttryck.

Exempel	Resultat	Kommentar
5+3	8	Addition
5-3	2	Subtraktion
5*3	15	Multiplikation
5**3	125	Upphöjt till
5/2	2.5	Division med decimaldel
5//2	2	Heltalsdivision
-5//2	-3	Heltalsdivision
37%10	7	Restoperator
10.*10	100.0	Svaret blir ett decimaltal

För att använda operatorer som roten ur måste du importera biblioteket math, detta görs enkelt genom att i början av ditt program skriva `import math`. T.ex. är roten ur då `math.sqrt(x)`.

Tabell 9.4: Några användbara logiska operatorer.

Exempel	Resultat	Kommentar
5 == 5	True	Likhet
5 != 5	False	Icke-likhet (! negerar)
5 >3	True	Större än
5 >= 5	True	Större än eller lika med
5 <3	False	Mindre än
5 <= 3	False	Mindre än eller lika med
x and y		True omm bägge påståenden är sanna
x or y		True om minst ett av påståenden är sanna
x^y		True om exakt ett av påståenden är sanna
not(True)	False	Omvänder bool

I python finns en mängd olika *datatyper*. I många programmeringsspråk måste man specificera datatyp när man deklarerar en variabel, men inte i python. En variabel kan även byta datatyp under en körning. Nedan följer ett antal vanliga datatyper:

Tabell 9.5: Några vanliga datatyper.

Namn	Exempel	Kommentar
int	5	heltal (integer)
float	5.0	flyttal (decimaltal)
str	"Hej!"	textsträng (string), kan skrivas med "eller ’
list	x = [5, ’Hej’, 5.0]	lista, kan innehålla andra datatyper. Listans element är indexerade med start på noll, här 0-2, t.ex: x[2] returnerar 5.0
bool	True	logisk sanning (boolean)

Utöver de kommandon som är specifika för turtlen så finns det också flera kommandon som man kan använda i vilka python-program som helst. Här följer en lista på några av dessa:

Tabell 9.6: Några vanliga fördefinierade kommandon och hur de skrivs i Python.

Kommando	Exempel	Beskrivning
print()	print("Hello world")	Skriv ut det som står innanför parenteserna
input()	x = input()	Läs in en rad som en sträng
if	if n == 3: #do something	Kolla om villkoret är True eller False, om det är True så körs raderna inne i if-satsen om det är False så hoppar man direkt till det som kommer efter if-satsen

else	if n == 3:
	  #do something
	else:
	  #do something else
		Efter en if-sats kan en else-sats följa,
		men den måste inte göra det. Om det
		finns en else-sats efter en if-sats, så
		hoppar man dit om villkoret i if-satsen är False

elif	if n == 3:
	  #do something
	elif n == 2:
	  #do something else
		Efter en if-sats kan man också ha en elif-sats.
		Om det finns en elif-sats så hoppar man
		dit om villkoret i if-satsen är False, men inte
		annars. Elif-satsen funkar sedan som en if-sats.

while	while n >0: #do something	Så länge villkoret i while-loopen är True, utför allt som står i while-loopen. Mellan varje körning av det som står i loopen kollar man alltså om det fortfarande stämmer.

for	for x in lista:
	  #do something
	————–
	for x in range(n):
	  #do something
		Låt x anta alla värden som står i listan i ordning,
		och utför det som står i loopen för varje sådant x.
		Första gången man går igenom loopen kommer x
		alltså ha värdet som står först i listan, andra gången
		det andra värdet, och så vidare.
		En typisk användning är den som syns i det
		andra exemplet, när listan som x går igenom är
		talen från 0 till n-1. range(n) genererar alltså en
		lista med alla tal från 0 till n-1, i ordning.

continue	ans = 0
	for i in range(10):
	  if i%2 == 0:
	    continue
	  else:
	    ans += i
		Används inuti en loop: gå omedelbart till
		nästa iteration av loopen. I exemplet vill vi
		hitta summan av alla udda tal från 0 till 9.
		Om vi stöter på ett jämnt tal så går vi vidare
		direkt. Om vi stöter på ett udda tal så lägger
		vi till det till summan ans.

break	n = 10
	while (True):
	  print(n)
	  n -= 1
	  if n == 0:
	    break
		Används inuti en loop: avbryt loopen direkt.

import	import math	Importerar ett bibliotek av fördefinierade funktioner.

Här följer några stycken kod. Tänk igenom koden steg för steg, och skriv ned vad du tror att koden skriver ut. Du kan anta att `turtle` och andra bibliotek redan är importerade:

```
def sum(a,b):
  return (a + b)
x = sum(5,3)
print(x)
```

```
x = 123
if x % 2 == 1:
  print("Talet är jämnt... eller?")
else:
  print("Talet är udda")
```

```
for i in range(10):
  print(i)
  if i == 5:
      print("Oooooch här kommer:")
```

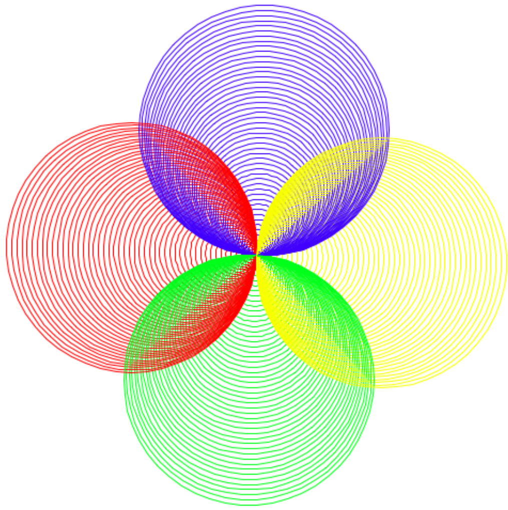
```
def mult(n):
  ut = 1
  for i in range(n):
      ut = ut*(i+1)
  return(ut)

print(mult(4))
```

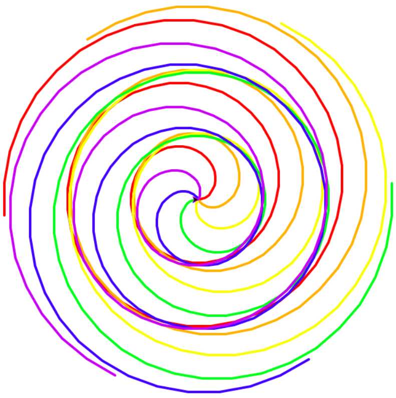
```
def rita(sida, n, farg):
  t = turtle.Turtle()
  t.pencolor(farg)
  t.fillcolor(farg)
  t.begin_fill()
  for i in range(n):
      t.forward(sida)
      t.left(360/n)
  t.end_fill()

rita(50, 4, "red")
```

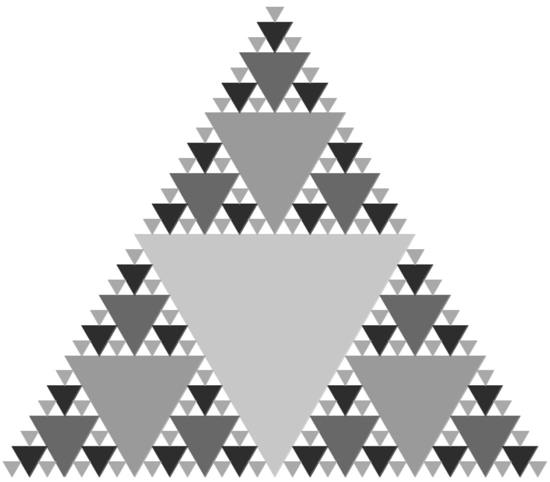
1. Gör en funktion som ritar en cirkel, och försök skapa följande mönster:



2. Gör en funktion som ritar en spiral, och försök skapa följande mönster:

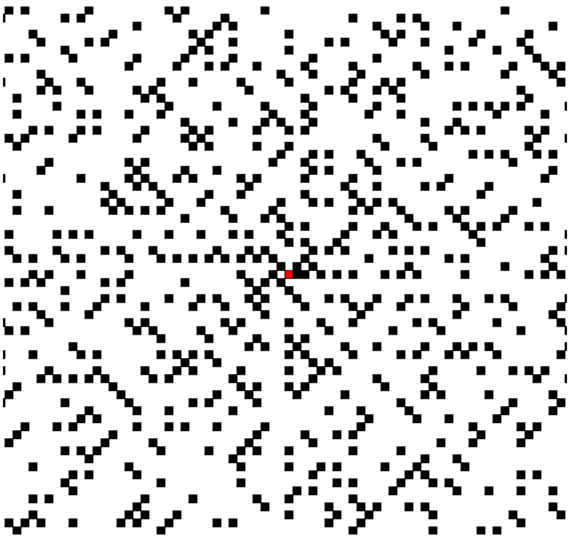


3. Rita en Sierpinskitriangel (se exempel).



4. Rita ett träd.

5. Rita en Ulamspiral.



6. Rita Mandelbrotmängden.
7. Skapa loggan till Mattekollo 2021!

9.2 Funktioner

Funktioner används för att kunna upprepa kod utan att skriva den igen. Det gör koden både mer lättförståelig och snabbare att skriva.

```
# namnet "funktion" kan ersättas med valfritt namn, vanligen
# börjat med liten bokstav
def funktion(parameter1, parameter2, mult = 1):
  # Saker görs med parametrarna som skickats in
  a = (parameter1 + parameter2) * mult   # variabel a finns endast i funktionen
  return a     # funktionen skickar tillbaka

# koden mult = 1 betyder att parametern mult får defaultvärde 1
# (om inget annat fylls i blir den 1)
# Exempelanrop:
function(5,7,2) # = (5+3)*2
function(5,7)   # = (5+3)*1
# För extra tydlighet kan man även anropa en funktion med:
funktion(parameter1 = 2, 3, mult = 5)
# ...då vet läsaren ungefär vilken siffra som betyder vad.
```

9.3 Dictionaries

Dictionaries, eller *lexikon*, är en slags uppsatsverk. Dessa kan användas för att koppla samman uppslagsord, s.k. *nycklar*, med valda definitioner. Exempelvis kan vi koppla ordet `'turkos'` med `'#40E0D0'` (den hexadecimala representationen av färgen turkos). Vi skulle även kunna koppla ihop priser på olika varor och varans namn eller liknande.

```
# Varor och deras pris:
pris = {'äpplen': 12, 'bananer': 14, 'citroner': 20}
print(pris)  # Skriver ut: {'äpplen': 12, 'bananer': 14, 'citroner': 20}
```

Exempelkod	Värde	Kommentar
pris['bananer']	*12*	*Nycklarna kan användas som index (med hakparentes).*
pris['bananer'] = 14		*Ändrar värdet för befintlig nyckel.*
pris['bananer']	*14*	
pris['dadlar'] = 25		*Lägger till ny nyckel med värde.*
pris	*{'äpplen': 12, 'bananer': 14, 'citroner': 20, 'dadlar': 25}*	*Innehåller nu 4 par.*
'fikon' in pris	*False*	*Test på existens av nyckel.*
'fikon' not in pris	*True*	*Test på icke-existens av nyckel.*
'dadlar' in pris	*True*	*Test på existens av nyckel.*
pris.get('dadlar')	*25*	*Alternativ till pris['dadlar'].*
pris['fikon']	*Error*	*Illegalt.*
pris.get('fikon')	*None*	*Om nyckeln inte existerar.*
pris.get('fikon', 'Varan finns ej')	Varan finns ej	*Andra parametern anger standardvärde som returneras om nyckeln inte existerar.*
len(pris)	4	*Antalet par.*
del pris['citroner']		*Tar bort ett element utifrån nyckel.*
len(pris)	3	*Antalet par.*
list(pris)	list(pris.keys())	*['äpplen', 'bananer', 'dadlar']*
list(pris.items())	[('äpplen, 12), ('bananer', 14), ('dadlar', 25)]	*En lista av tupler (nyckel-värdepar).*

Appendix

A. Regler Mattedrabbning

Regelsammanfattning Mattedrabbning

- Lagen turas (nästan alltid) om att utmana varandra på problem.
- Laget som blir utmanat presenterar lösningen eller skickar utmaningen tillbaka.
- En person skickas till tavlan för att presentera lösningen.
- Laget som inte presenterar lösningen skickar fram en opponent till tavlan, som ställer frågor.
- När opponenten är nöjd, så ställer juryn (lärarna) frågor.
- Man får poäng utefter hur rätt man hade när man presenterade.
- Om lösningen är helt korrekt, får det presenterande laget 12 poäng och andra får 0 poäng.
- Om lösningen är helt fel och opponenten påpekar det och förklara varför det är fel, så får laget som presenterar 0 poäng och laget som opponerar får 6 poäng.
- Man får inte prata med laget om man står framme vid tavlan.
- Man får ta halvminutspauser (max 6 stycken) för att laget ska få prata med personen som står framme vid tavlan.
- Ingen person får gå fram och presentera mer än två gånger.
- I början av drabbningen har man en liten s.k. ”kaptenstävling” där det vinnande laget får bestämma vem som utmanar först.
- Laget med mest poäng vinner!

Detaljerade regler Mattedrabbning

Mattedrabbning är en tävling för två lag i lösning av matematikproblem. Drabbningen består av två delar. Först får lagen ett antal problem och en bestämd tid att lösa dem på. Under lösningstiden får lagen inte använda hjälpmedel (förutom simpel miniräknare som är ok, samt pennor, passare, linjal och dyl.), och får endast prata om problemen med juryn. Efter utsatt tid börjar själva drabbningen, när lagen presenterar lösningarna för varandra enligt reglerna. När det ena laget presenterar en lösning, opponerar det andra laget på lösningen, d.v.s. söker fel och brister i den, och om det visar sig att lösningen saknas, får även det andra laget presentera sin egen lösning. Juryn tilldelar poäng både för presentation och opponering. Om lagen inte lyckas slutföra lösningen under diskussionen eller om de har några fel, får juryn ge en del av poängen (och även alla poäng) till sig själv. Om totalpoängen skiljer sig med mindre än 4 poäng när tävlingen är över, slutar drabbningen oavgjort, annars vinner laget med flest poäng.

Utmaning

Drabbningen består av flera omgångar. I varje omgång är det ena laget kärande och det andra laget svarande. Först utmanar käranden till ett problem, som inte presenterats tidigare (till exempel: "Vi utmanar motparten till problem 8"). Sen bestämmer det svarande laget om det tackar ja eller nej till utmaningen (de får 1 minut på sig att bestämma sig). Om laget tackar ja, måste det skicka en föredragande som ska presentera lösningen, medan det kärande laget får skicka en opponent med uppdraget att söka fel i lösningen. Om svarande laget tackar nej (det kallas för kontroll av korrekthet) måste det kärande laget skicka den föredragande, medan det svarande får skicka en opponent. (Ett lag får också låta bli att skicka en opponent för att spara ett uppträdande. Då deltar laget inte längre i den pågående omgången, får inte poäng och kan inte ångra sig).

Föredraget

Först presenterar den föredragande sin lösning. Han/hon måste ge svar på alla frågor i problemet och visa att alla svaren är riktiga och fullständiga. Bland annat måste den föredragande bevisa varje påstående den formulerar eller hänvisa till det som välkänt. Den föredragande måste uttrycka sig klart, bland annat måste han/hon vara beredd att upprepa vilken del som helst av sitt föredrag om juryn eller opponenten ber om det. Föredragets tid är begränsat till vanligtvis 10-15 minuter. Om tiden tar slut men den föredragande vill fortsätta får juryn bestämma om han/hon får göra det.

Den föredragande får ha med sig ett pappersark med bilder, och (om juryn tillåter det) ett med beräkningar. Men man får inte ha med sig texten med hela lösningen. Den föredragande får:

- före föredraget rita upp allt som behövs på tavlan (teckningar, ritningar o.s.v.);
- låta bli att svara på opponentens frågor före diskussionen;
- be opponenten att precisera sin fråga (till exempel kan man förelägga sin egen version ”Förstår jag rätt att du frågar ...?”);
- låta bli att svara på en fråga, med någon av motiveringarna: a) det vet jag inte; b) jag har ju redan svarat på denna fråga (och förklara när och hur); c) det är inte en korrekt fråga, eller den frågan ingår inte i vetenskaplig diskussion. Om opponenten inte godkänner motivering (b) eller (c) bestämmer juryn vem som har rätt.

Den föredragande måste inte:

- förklara hur man har kommit på svaret om man kan bevisa på ett annat sätt att svaret är riktigt och fullständigt;
- jämföra sitt eget förfaringssätt med ett annat, bland annat i vilket mån det är kort, vackert eller generellt.

Opponering

Under föredraget får opponenten bara ställa frågor om den föredragande tillåter det. Dock får opponenten be om att upprepa en del av föredraget, och även tillåta att ett påstående som man tror vara självklart inte behöver bevisas. Efter föredraget får opponenten ställa frågor. Om opponenten inte kan ställa nästa fråga inom en minut bestäms det att man inte har fler frågor. Om den föredragande inte börjar svara på en fråga inom en minut bestäms det att svaret saknas. Som en fråga får opponenten:

- kräva att den föredragande upprepar en viss del av föredraget;
- be den föredragande att precisera vilket påstående som helst, bland annat genom att a) be om en terminologisk definition (”Vad menar du med...”) eller b) formulera om ett påstående och be om en bekräftelse (”Förstå jag rätt att du påstår...”);
- be den föredragande att bevisa ett påstående som den föredragande har använt och som opponenten inte känner till (juryn bestämmer om påståendet verkligen är allmänt känt);
- godkänna svaret eller icke godkänna det (i senare fall med motivering).

Om opponenten tror att den föredragande drar ut på tiden för att finna en lösning under föredraget, eller att föredraget mest inte har något att göra med lösningen, då får opponenten efter 10 minuter be den föredragande att framlägga ett svar (om problemet måste ha ett svar) eller en plan för sitt resonemang. Opponenten måste upprepa och precisera sina frågor om den föredragande eller juryn ber om det. Slutligen får opponenten ge ett utlåtande på en av följande former: a) lösningen är riktig; b) lösningen (svaret) är riktig på det hela taget, men det finns dessa brister; c) lösningen (svaret) är felaktig, det finns fel (brister) i dessa nyckelpåståenden, eller det finns ett motexempel.

Om opponenten godkänner lösningen, slutar han/hon och hans/hennes lag att delta i diskussionen under den här omgången. Vanligtvis börjar juryn ställa frågor till den föredragande efter opponentens utlåtande. Juryn får även blanda sig i diskussionen tidigare, dock får den då inte ställa frågor som hade kunnat ge poäng till opponenten om denne skulle ställa dem.

Båda lagen måste vara tysta under föredraget och diskussionen. För kommunikation och rådgivning mellan ett lag och dess representant får det tas en paus i en halv minut. (Motparten får använda denna tid för konsultation också.) Varje lag får ta en sådan paus när som helst, dock bara 6 gånger under drabbningen. Det är kaptenen som tar pausen. Representanten vid tavlan får bara be kaptenen att ta pausen eller be om att få bli utbytt mot en annan spelare (detta räknas som två pauser).

Antalet uppträdanden

Varje spelare har rätt att uppträda två gånger, d.v.s man får skickas till tavlan som fördragare eller opponent högst två gånger under drabbningen. Om laget byter ut sin representant vid tavlan räknas det som uppträdande av både den nya föredragande och den som blivit utbytt. Dessutom kostar ett utbyte två halvminutspauser (denna minut får laget använda även för konsultation). Således kan ett lag göra högst tre utbyten.

Den första utmaningen – Kaptenstävlingen

Vem som skall utmana först avgörs genom kaptenstävlingen just före själva drabbningen. Varje lag skickar en representant till tavlan (det kan vara kaptenen eller vilken lagmedlem som helst). Juryn ger ett enkelt problem till representanterna. Representanten som först säger sig ha ett svar, får svara. Man vinner om lösningen är rätt och förlorar annars. Juryn måste säga i förväg om det räcker med bara svar eller om det krävs ett svar med resonemang. Istället för kaptenstävlingen får juryn använda en lottdragning eller framställa ett spel för representanterna.

Rollomvändning

Rollomvändning kan bara ske i den omgång som inte är kontroll av korrekthet. Om juryn understödjer opponentens kritik, erbjuder juryn opponenten att rätta felen och fylla luckorna i föredraget. Om opponenten tackar ja sker en partiell rollomvändning och opponenten och den föredragande byter roller. Om juryn understödjer opponentens påstående att lösningen saknas i föredraget, eller är helt felaktig, erbjuder juryn opponenten att presentera sin egen lösning. Om opponenten tackar ja sker en total rollomvändning. Efter rollomvändningen får den före detta opponenten poäng för sin lösning, medan den före detta föredragande kan få poäng för kritik. Dock kan det inte ske rollomvändning en gång till i samma omgång.

Korrekt utmaning

Om utmaningen antas direkt, så är den alltid s.k. *korrekt*. Om utmaningen skickas tillbaka, så finns det två möjligheter. Om det utmanande laget erkänner att de inte har någon lösning, så är utmaningen automatiskt *inkorrekt*.

Om det utmanande lagets föredragare går fram till tavlan och berättar en lösning så beror korrekheten på. Om opponenten kan bevisa att lösningen är inkorrekt så räknas även utmaningen som inkorrekt. Om opponenten godkänner lösningen räknas utmaningen som korrekt.

Ordningen på utmaningarna och mattedrabbningens slut.

Om utmaningen som skedde var inkorrekt, så måste det utmanande laget utmana även i nästa omgång. I alla andra fall turas lagen om att utmana varandra.

När som helst kan det utmanande laget säga att de inte längre vill utmana denna mattedrabbning (vanligtvis gör man detta när man inte längre har några lösta problem bland de kvarvarande). Efter det får det andra laget möjligheten att redovisa de kvarvarande problemen (vilka de vill, de måste inte redovisa något). Laget som sagt att de inte längre vill utmana kan då bara opponera och få poäng för opponering. Inga rollbyten kan längre ske.

Mattedrabbningen är slut när alla problemen har redovisats eller om ett av lagen säger att de inte vill utmana längre och det andra laget vill inte längre redovisa något.

Poängutdelning

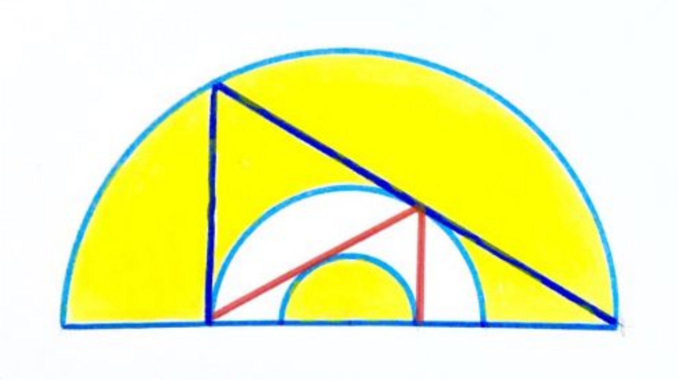
Varje problem kan ge 12 poäng, vilka slutligen delas mellan den föredragande, opponenten och juryn. Om den föredragande har presenterat en rätt och fullständig lösning, får han/hon alla 12 poäng. Annars finns det fel och luckor i lösningen, som opponenten måste upptäcka och påpeka (om opponenten bortser från några fel måste juryn påpeka dem senare).

Den föredragande får rätta felen och fylla i luckor. Orättade fel och ofyllda luckor minskar hans/hennes slutpoäng (juryn bestämmer med hur mycket). Dock om den föredragande har rättat alla fel och har presenterat den fullständiga lösningen bara efter ledande frågor från opponenten och/eller juryn, kallas det en ”oren lösning”. Då får juryn ta 1-2 poäng av den föredragande och ge dem till opponenten eller till sig själv. För varje orättad brist som opponenten har påpekat får han/hon hälften av bristens kostnad (d v s halva den poäng som avdragits från den föredragande). Den andra halvan kan opponenten försöka få genom att rätta bristerna själv (om juryn tillåter en partiell rollomvändning).

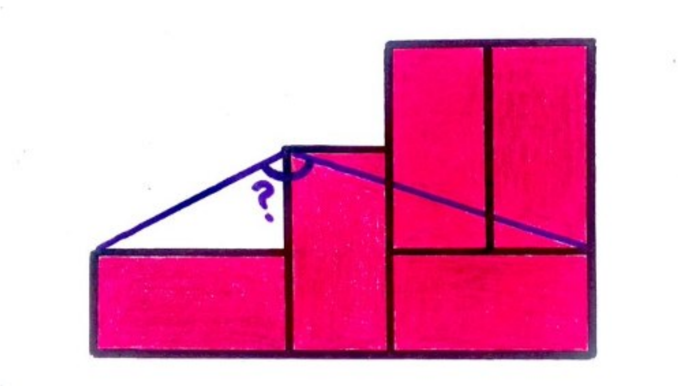
Om de påpekade och orättade bristerna kostar sammanlagt 6 poäng eller mer, bestäms det att opponenten bevisat att lösningen saknades. Då kan juryn tillåta en fullständig rollomvändning, d v s opponenten får presentera sin egen lösning helt från början. Efter rollomvändning tilldelar juryn de poäng som är kvar enligt samma princip: f.d. opponenten får för sitt föredrag, den f.d. föredragande för kritik (halvkostnadsprincipen och oren lösning gäller). Om opponenten har bevisat att lösningen saknas under kontroll av korrekthet får denne 6 poäng, medan den föredragande får 0 till 6 poäng för idéer.

B. Geometriproblem från Catriona Shearer

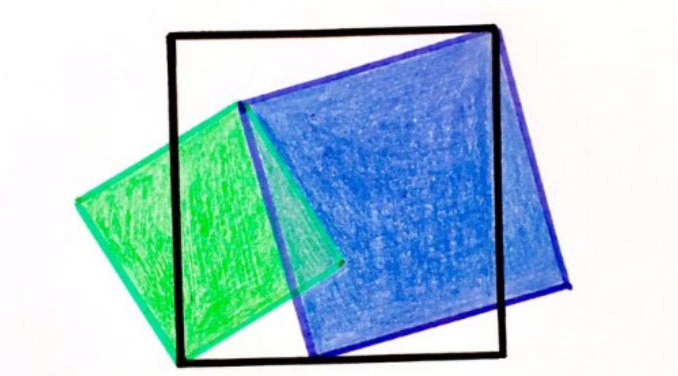
1. Tre koncentriska halvcirklar och två rätvinkliga trianglar. Vilken andel av arean är gul?



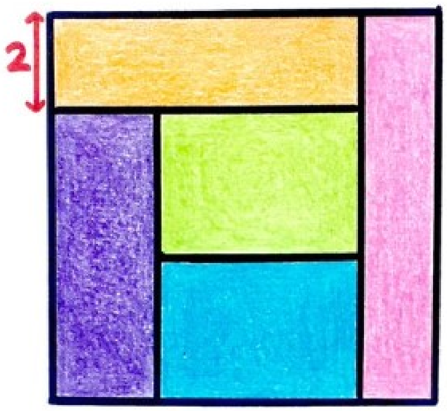
2. Fem kongruenta rektanglar. Hur stor är vinkeln?



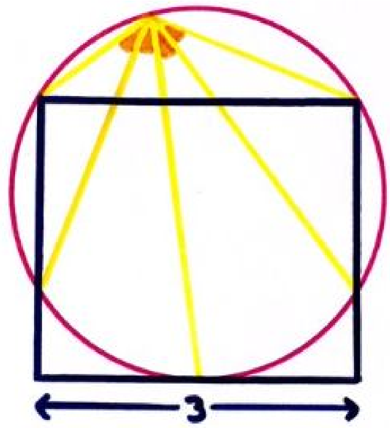
3. Tre kvadrater. Den gröna kvadratens area är 16. Vad är den blåa kvadratens area?



4. En kvadrat är uppbyggd utav fem rektanglar som alla har samma area. Vad är kvadratens area lika med?



5. De fyra markerade vinklarna är lika stora. Om bredden på rektangeln är 3, vilken area har cirkeln?



Häftet innehåller material från Mattekollo 2020 för åk 9-gy2, alla matematiklektioner samt programmeringsmaterial för nybörjare.

Tack till alla deltagare och ledare!