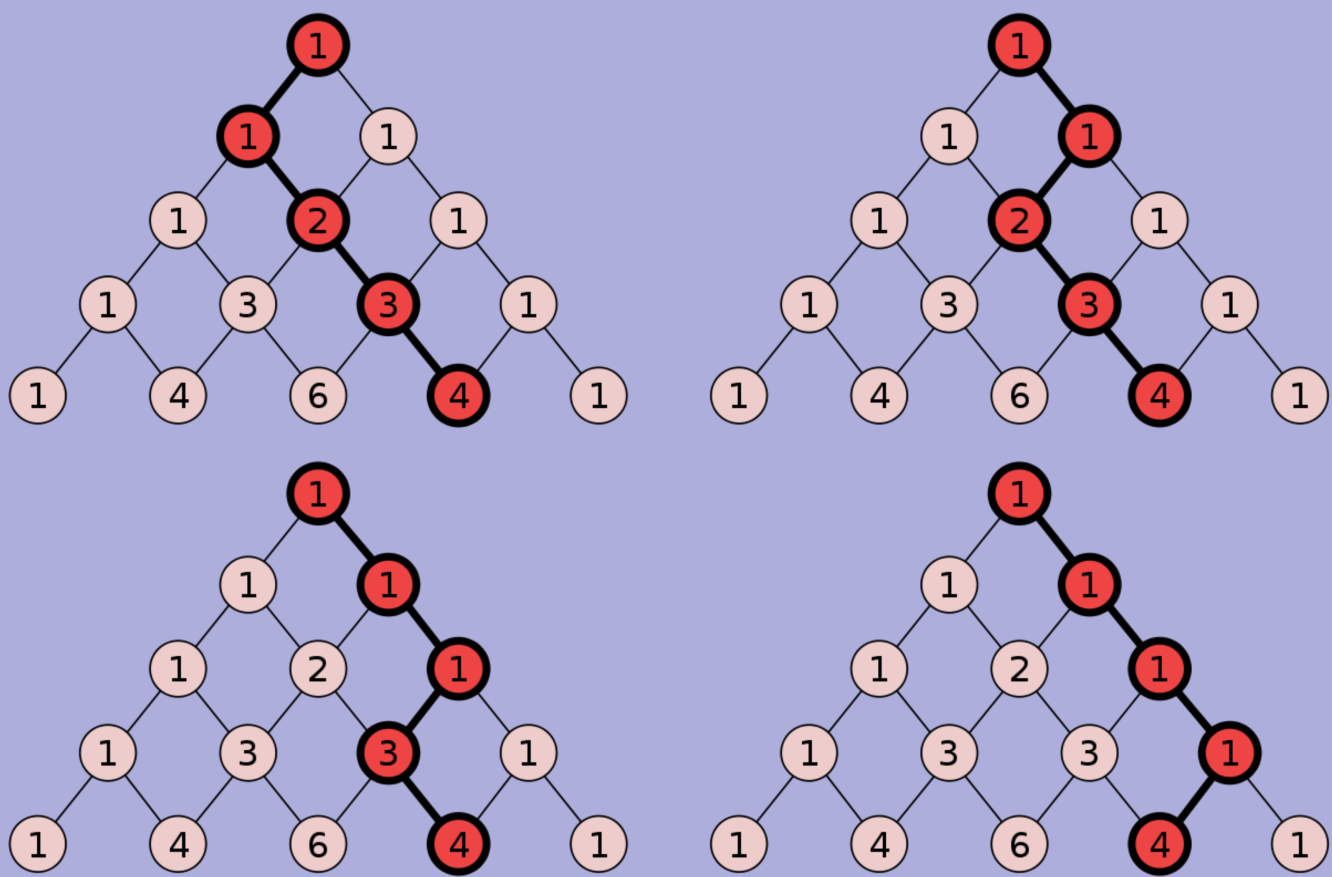
2021 MATTEKOLLO

Lektionsmaterial

åk 6-9



Lektionsmaterial Mattekollo 2021

åk 6-9

V. Chapovalova, V. Jansson, F. Löfgren, L. Molokov, M. Nilsson, B. Verbeek

Norrtälje, juli 2021

Innehåll

IV Lektionsmaterial programmering - Erfarna

Lektionsmaterial gröna gruppen

1. Smart räkning

1.1 Smart räkning

1. Räkna ut på ett så smidigt sätt som möjligt:

(a) $345 \cdot 7 + 3 \cdot 345$

(b) $67 \cdot (33 + 10) + 33^2$

2. Beräkna

(a) $\dfrac{117 + 118 + 119 + 120 + 121}{5}$

(b) $\dfrac{1233 + 1234 + 1235}{6}$

(c) $\dfrac{1001 + 1003 + 1005 + 1007}{502}$

3. **(a)** Vad är 4% av 75?

(b) Vad är 1,25% av 20?

4. Benjamin ska ha fest men vet inte hur många som kan komma eftersom det är corona. Han ska bjuda på tårta och vill dela den i förväg på ett sätt som säkerställer att alla gäster kan få lika mycket. Han kan dela tårtan i ett antal lika stora bitar. Hur många bitar måste han som minst dela in tårtan i om han vet att det blir upp till 9 personer på festen?

5. Beräkna $\frac{3}{4} \cdot \frac{31}{11} \cdot \frac{33}{62} \cdot \frac{2}{27}$.

6. Vad blir produkten $(1 + 1/2) \cdot (1 + 1/3) \cdot (1 + 1/4) \cdot \ldots \cdot (1 + 1/100)$?

7. Vilket är större: $1234567 \cdot 1234569$ eller 1234568^2, och hur mycket större?

8. Faktorisera 1599 fullständigt (ned till primtal).

9. Bestäm $\dfrac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{99} + \sqrt{100}}$.

10. Visa att följande tal är kvadrattal:

(a) $2017 \cdot 2019 \cdot 2021 \cdot 2023 + 16$

(b) $5^{10} + 10^5 + 2^8$

(c) $2020^2 + 2020^2 \cdot 2021^2 + 2021^2$

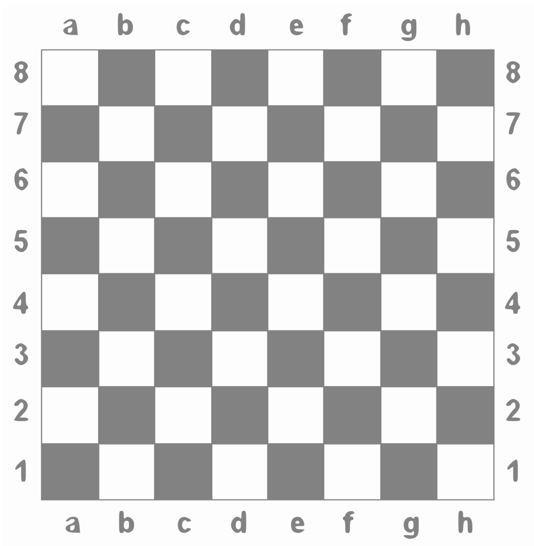
2. Matematiska spel

2.1 Spel I: Enkel vinst

1. Det ligger 10 nektariner på bordet, de väger 50, 101, 102, 103, 104, 105, 106, 107, 108, 121 gram. Benjamin och Madde turas om att göra drag, Benjamin börjar. På ett drag ska man välja en nektarin och antingen behålla den själv eller ge den till motspelaren. Så fort någon av spelarna har 5 nektariner så får den andra spelaren resten och spelet är slut. Den som har större sammanlagd vikt på sina nektariner vinner. Vem av dem kan vinna oavsett hur motståndaren spelar?

I spelen nedan kommer Benjamin alltid att börja och Madde att vara tvåa; de turas om att göra drag. Varje uppgift går ut på att bestämma vem som har en vinnande strategi, det vill säga vem av dem kan vinna, oavsett hur motståndaren spelar? Bevisa även att strategin kommer att fungera i alla möjliga fall.

2. På rutan **a2** på ett schackbräde står en dam. På ett drag får man flytta damen ett valfritt antal rutor till höger, uppåt, diagonalt uppåt-vänster eller diagonalt uppåt-höger. Den som inte kan göra något drag förlorar.



3. Först slår man en sexsidig tärning och sedan turas Benjamin och Madde om att göra drag. Varje drag ska man visa ett antal fingrar från 1 till 5. När ledarna gjort 10 drag var så slutar spelet. Om summan av alla 20 talen som visats samt antalet prickar som tärningen visar är delbar med 5, så vinner Madde, annars vinner Benjamin. Vem av dem kan vinna oavsett hur motståndaren spelar och oavsett hur tärningen hamnar?

4. Varje drag skriver man upp ett heltal från 1 till 5 på tavlan. Spelet slutar när de tillsammans har gjort 33 drag. Därefter multipliceras alla talen som står på tavlan. Om resultatet innehåller två nollor så vinner Madde, annars vinner Benjamin.

5. På tavlan finns talen 2, 3, 4, 5, 6. På ett drag måste man sudda bort ett tal som är relativt primt med summan av alla talen. Den som inte kan göra ett drag förlorar.

6. Det finns en 4×4-tabell som från början är tom. Benjamin sätter ett kryss i en valfri tom ruta, Madde sätter en ring, och så turas de om att sätta ut sina symboler. Den som först får tre i rad lodrätt eller vågrätt av sin symbol vinner.

7. På en 1×10-remsa ligger det ett mynt i varje ruta, deras valörer är i ordning: 8, 10, 9, 1, 2, 3, 7, 6, 5, 4 bitcoins. På ett drag måste man plocka ett av mynten åt sig. Det första mynten kan tas från vilken ruta som helst, medan senare mynt får bara tas från rutor som ligger bredvid någon ruta du tagit från tidigare. Om en av spelarna har slut på drag så fortsätter den andra göra drag tills hen är klar. Den som har mest pengar i slutet av spelet vinner.

8. På tallinjen är punkterna med koordinaterna $1, 2, 3, \ldots, 100$ markerade. På ett drag ska man kryssa två okryssade punkter samt skriva upp avståndet mellan punkterna på sitt papper. När alla punkter är kryssade kollar Benjamin på tal som Madde har skrivit upp. Om det finns likadana tal där så vinner Benjamin, annars vinner Madde.

9. Det finns en kubisk kartonglåda med ett pris inuti. På ett drag väljer man en av lådans kanter och skär upp lådan längst med den. Den som gör så att lådan går att öppna, får vinna och ta priset (lådan kan öppnas antingen om någon sida har tre uppskurna kanter eller om kartongen går att ta isär i två bitar).

10. På bordet ligger 50 kort med talen $1, 2, 3, \ldots, 50$ på. På ett drag måste man ta bort 6 kort där summan av talen är 50. Den som inte kan göra ett drag på något sätt när det är ens tur förlorar.

2.2 Spel II: Överskådliga positioner

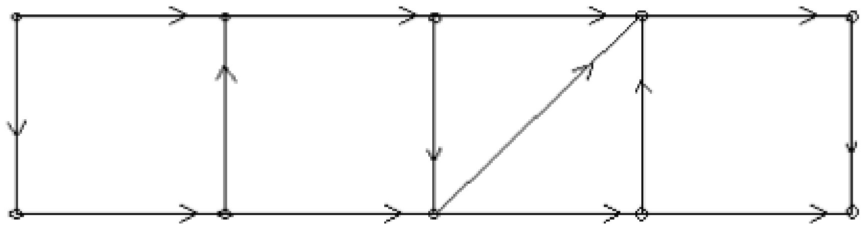
1. I hörnet på ett 3×3-schackbräde står en springare (häst). Benjamin och Madde turas om att flytta den enligt schackreglerna. Dock så får man aldrig flytta springaren till en ruta där den redan har varit. Spelet tar slut när det inte går att göra ett drag längre.

(a) På vilka rutor kan springaren befinna sig under spelets gång?

(b) På vilka av dem rutorna kommer det vara Maddes tur att göra drag?

(c) På vilka rutor kan spelet ta slut?

2. En pjäs börjar i den övre vänstra noden i grafen på bilden. Benjamin och Madde turas om att flytta den till en angränsande nod längs med pilarna. Benjamin börjar.

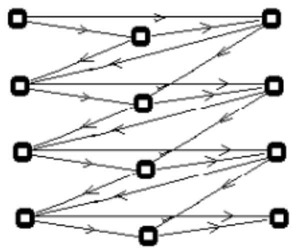


I vilka noder kan det vara Benjamins tur och i vilka Maddes tur?

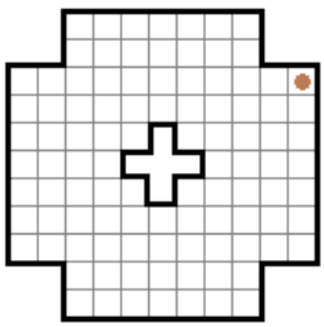
3. **(a)** Från början står talet 24 på tavlan. Benjamin och Madde turas om att göra drag, Benjamin börjar (och så är det resten av lektionen). På ett drag får man minska talet med 1 eller 2, om resultatet fortfarande är positivt. Madde får aldrig göra exakt samma drag som Benjamin nyss gjorde. Spelet tar slut när man inte kan göra ett drag längre. Bestäm alla tal som garanterat kommer komma upp på tavlan under spelets gång.

(b) Från början står det en pjäs på rutan längst till höger på en 1×24-remsa. På ett drag får man flytta pjäsen 2 eller 3 rutor till vänster. Madde får aldrig göra exakt samma drag som Benjamin nyss gjorde. Spelet tar slut när det inte finns drag längre. Vilka rutor kommer pjäsen garanterat ìnte besöka?

4. Från början står pjäsen i övre vänstra noden på grafen. Spelarna turas om att flytta pjäsen till en angränsande nod längs med en pil. Den som inte kan göra ett drag förlorar. Vem av spelarna kan vinna oavsett hur motståndaren spelar?

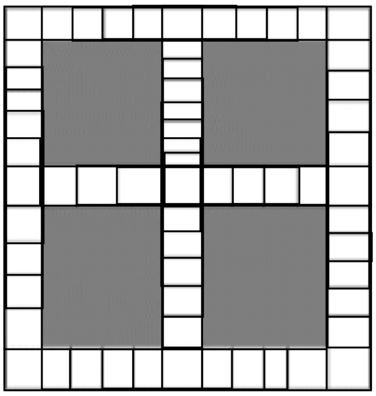


5. Från början står en pjäs på en av rutorna på ett kortliknande 12×12-bräde med ett hål i (se bilden). På ett drag måste man flytta pjäsen ett steg i en av tre riktningar: vänster, nedåt, eller diagonalt nedåt-vänster. Den som inte kan göra ett drag förlorar. Vem av spelarna kan vinna oavsett hur motståndaren spelar?



6. Från början står talet 123 på tavlan. Benjamin och Madde turas om att göra drag, Benjamin börjar som vanligt. På ett drag ska talet minska med ett utav sina siffror. Den som får talet till att bli 0 vinner. Vem av spelarna kan vinna oavsett hur motståndaren spelar?

7. Vägarna i parken är indelade i ojämna rutor (se bilden, gräsmattorna är färgade mörkt). En legorobot står i rutan längst upp till vänster. På ett drag ska roboten flyttas till en angränsade ruta nedåt eller åt höger. Benjamin och Madde turas om att styra roboten. Den som inte kan göra ett drag förlorar. Vem av spelarna kan vinna oavsett hur motståndaren spelar?



8. På bordet ligger 100 tändstickor. På ett drag får man ta en tändsticka eller ett primt antal tändstickor. Den som tar sista tändstickan vinner. Vem av spelarna kan vinna oavsett hur motståndaren spelar?

9. Från början står det 111 ettor på tavlan. På ett drag får man välja två tal, räkna ut deras summa eller deras produkt, skriva upp resultatet och sudda bort de två talen man valt. Talet man skriver upp måste vara mindre än 4. Den som inte kan göra ett drag förlorar. Vem av spelarna kan vinna oavsett hur motståndaren spelar?

2.3 Spel III: Skämtspel

I spelen nedan turas Benjamin och Madde om att göra drag, Benjamin börjar alltid. Spela spelet mot varandra några gånger för att ta reda på vem som vinner.

10. Det finns ett bräde 1×100.

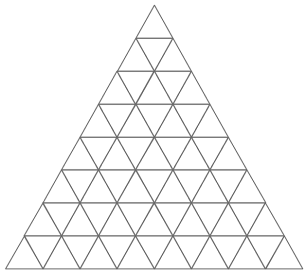
(a) På ett drag ska Benjamin skriva in kryss i tre lediga rutor, medan Madde ska skriva in tre ringar (inte nödvändigtvis i rad).

(b) På ett drag ska Benjamin sätta ut 2 kryss i rad, medan Madde ska sätta ut 2 ringar (inte nödvändigtvis i rad).

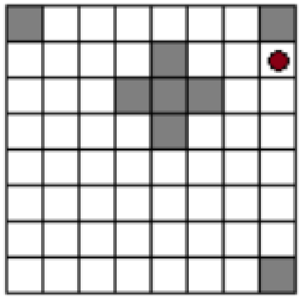
Den som inte kan göra ett drag förlorar.

11. **(a)** Det finns en hög med 50 minneskort. På ett drag tar en spelare 1 eller 3 minneskort. Den som tar det sista minneskortet vinner.

(b) Det finns en hög med 100 minneskort. På ett drag tar Benjamin 3 eller 5 minneskort, medan Madde tar 1 eller 7 minneskort. Den som inte kan göra ett drag förlorar.



12. Det finns en triangulär chokladkaka som är lätt att dela upp i små triangulära bitar (se bilden). På ett drag får man dela upp en bit i två mindre längs med en rak skåra. Den som inte kan göra ett drag *vinner*.



13. På ett spelbräde är vissa (mörka) rutor förbjudna och dit får man inte gå (se bild). På en av rutorna står en spelpjäs. På ett drag får man flytta den ett steg åt vänster eller neråt. Den som inte kan göra ett drag förlorar.

14. På ett 6×7-bräde sätter Benjamin ut ett kryss i en ledig ruta på sin tur och Madde sätter ut tre ringar i rad (vågrätt, lodrätt eller diagonalt). Den som inte kan göra ett drag förlorar.

15. Från början står det ett torn i övre högra hörnet på ett schackbräde. På ett drag måste man flytta tornet antingen ett åt vänster eller ett valfritt antal steg neråt. Den som inte kan göra ett drag förlorar.

16. **(a)** Runt en cirkel finns 13 ofärgade punkter. För turas spelarna om att färglägga ofärglagda punkter i rött eller blått (båda får välja båda färgerna). När alla punkterna är färglagda så turas de om att förbinda olikafärgade punkter med sträckor, en sträcka per drag. Den som inte kan göra ett drag förlorar.

(b) Samma fråga för 14 punkter.

17. Benjamin och Madde fördelar 16 små vikter som väger $5, 6, 7, \ldots, 20$ gram. Madde tog de åtta vikterna 9 till 16 gram och Benjamin fick resten. Därefter turas de om att sätta ut en vikt i taget på en balansvåg. Benjamin lägger en av sina vikter i den vänstra vågskålen, varpå Madde lägger en av sina i den högra och så fortsätter de. Madde vinner om skillnaden i vikt mellan skålarna är någon gång exakt 15 gram, annars vinner Benjamin.

18. På en cirkel finns 20 punkter markerade. På ett drag får man rita ut en triangel med hörnen i de utmärkta punkterna. Man får inte rita ut en triangel som överlappar med gamla trianglar, men de får ha gemensamma sidor. Den som inte kan göra ett drag förlorar.

19. Benjamin och Madde fick likadana uppsättningar med kort. I varje uppsättning är det 99 kort med tal från 1 till 99 på, varje tal förkommer exakt en gång. De turas om att lägga ut sina kort på bordet. Den efter vars tur summan av talen på korten blir delbar med 132 vinner.

2.4 Spel IV: Symmetrisk strategi

I spelen nedan turas Benjamin och Madde om att göra drag, Benjamin börjar alltid. Ta reda på vem som kan vinna oavsett hur motståndaren spelar och bevisa att den strategin är vinnande.

1. Det finns ett bräde 1×20. På ett drag får man sätta ut två kryss i två lediga rutor intill varandra. Den som inte kan göra ett drag förlorar.

2. På bordet står 30 glas på rad med botten upp. På ett drag får man vända på två glas till botten ner om de har exakt ett annat glas emellan sig. Den som inte kan göra ett drag förlorar.

3. Ett schackbräde är tomt från början. På ett drag får man sätta ut två kungar som slår varandra vågrätt eller diagonalt. Den som inte kan göra ett drag förlorar.

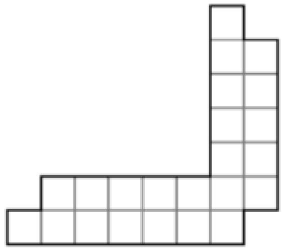
4. **(a)** På de 8 rutorna på vänsterkanten på ett schackbräde står det var sin pjäs. På ett drag får man flytta en av pjäser åt höger ett valfritt antal rutor (större än noll). Den som med sitt drag sätter en av pjäserna på högerkanten förlorar.

(b) I den vänstraste rutan på ett 1×9-bräde ligger det 9 ädelstenar. På ett drag får man flytta en ädelsten åt höger ett valfritt antal rutor (större än noll). Den som lägger en ädelsten i rutan längst till höger förlorar.

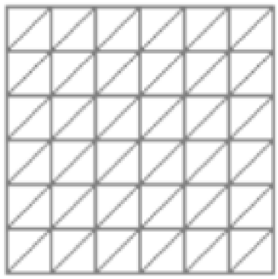
5. På bordet ligger två högar med kort, de har 8 respektive 10 kort. På ett drag får man dela upp en hög i två mindre olika stora högar. Den som inte kan göra ett drag förlorar.

6. En rund tårta är uppdelad med hjälp av radier i 25 likadana bitar. På bitarna finns det bär, de första tre har körsbär och sedan växlar det: två bitar är dekorerade med lingon, två med körsbär, två med lingon, två med körsbär och så vidare. På ett drag ska man antingen ta en bit eller två bitar intill varandra med olika bär. Den som tar den sista biten vinner.

7. På ett drag klipper man av antingen en tvårutig ″dominobricka″ eller en trerutig ″krok″. Man börjar med figuren till höger. Den som inte kan göra ett drag förlorar.



8. Linjerna delar upp kvadraten i 72 små triangelrutor (se bild). På ett drag får man måla en av triangelrutorna i svart. Den som gör så att det finns en svart triangel utav fyra rutor förlorar.



3. Kombinatorik

3.1 Kombinatorik I

1. En glad cirkushäst vill välja ett nytt sätt att ta sig från stallet till cirkusen varje dag.

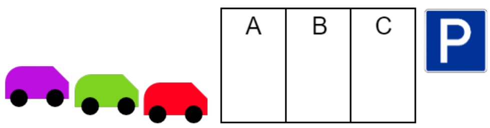
(a) Hur många dagar kan den hålla på att göra så?

(b) Kan man stänga vissa av vägarna så att svaret på **(a)** blir 9?

2. På en parkeringsplats finns tre platser.

(a) På hur många olika sätt (platser) kan en bil parkera?

(b) På hur många olika sätt kan två bilar parkera? Tre bilar?



Fakultet: Betecknas med ett utropstecken $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$. Exempel: $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$. I fortsättningen godtas ett uttryck med fakultet som svar, eller en utskriven produkt. Ni behöver alltså inte räkna ut siffervärdet.

3. På en större parkering finns 10 parkeringsplatser. På hur många olika sätt kan

(a) 10 bilar parkera där?

(b) 5 bilar parkera där?

(c) 5 platser vara tomma? *Observera att parkeringsplatser är lika, bilar är olika. Ex Ä*Böch B*Aräknas som samma, * om är en tom plats.*

4. I det svenska alfabetet finns det 29 bokstäver.

(a) Hur många ”ord” (behöver inte vara ett riktigt ord) med 5 bokstäver finns det?

(b) Hur många ord med 5 *olika* bokstäver finns det?

(c) Om ordet *måste* ha minst två bokstäver som är lika?

(d) Om ingen bokstav får förekomma 5 gånger?

5. Vid ett hus finns det 5 parkeringsplatser. På hur många sätt kan de 5 bilägarna i huset ställa sina bilar där om

(a) den ordningsamma Orvar alltid ställer sin bil på samma plats?

(b) nybörjaren Nanny bara kan parkera på kanten?

(c) tvillingbrorsorna Teo och Leo alltid parkerar sina bilar bredvid varandra?

(d) två av grannarna som bråkat med varandra absolut inte vill ställa sina bilar bredvid varandra?

6. Hur många 5-siffriga tal kan man bilda med 0, 2, 4, 6, 8? Ingen upprepning av siffror.

7. Knut har 13 olika statyer och vill ställa upp 8 av dem på en rad i sin trädgård. Madde har 12 statyer men vill välja 9 av dem att ställa i *sin* trädgård. För att veta vilken uppställning som är bäst måste de testa alla olika sätt. Det tar en sekund att testa en ordning. Tar det längst tid för Knut eller för Madde?

8. 4040 professorer kommer till Hilberts hotell. De ska bo två och två. På hur många sätt kan de paras ihop?

3.2 Kombinatorik II

1. Alla bilar har ett bilnummer som är tresiffrigt (från 000 till 999).

(a) Hur många nummer är delbara med 5?

(b) Hur många nummer innehåller inte siffran 6?

(c) Hur många nummer innehåller siffran 7?

(d) Hur många nummer innehåller minst en udda siffra?

(e) För två år sedan gjordes en ändring så att det sista tecknet även kunde vara en av 22 bokstäver (I, O, Q, V, Å, Ä och Ö är inte med). Hur många gånger fler nummerplåtar finns nu?

2. 11 deltagare i den gröna mattegruppen ska ställa sig i en ring. På hur många sätt kan de göra det om endast inbördes ordning räknas?

3. I en bokhandel finns 20 olika matteböcker. Du kommer till bokhandeln för att köpa tre stycken matteböcker. På hur många sätt kan du göra det?

4. På hur många sätt kan en jury bestående av 2 män och 3 kvinnor väljas bland en grupp av 5 män och 5 kvinnor?

5. **(a)** Leonid ska välja 4 kokböcker bland 100. Hur många sätt kan han välja?

(b) Leonid ska nu starta sin egen kokboksaffär, och ska istället välja 96 kokböcker att köpa bland 100. På hur många fler sätt kan han välja nu?

(c) Kan du generellt förklara ditt svar på **(b)** med:

i) Ord, utan ekvationer?

ii) Ekvationer, utan ord?

Vi kan säga att Leonid från n böcker väljer ut m stycken.

6. På en fest före 2020 skakade alla hand med alla exakt en gång. Det blev totalt 91 handskakningar. Hur många personer var på festen?

7. På en cirkel ligger 18 punkter, om vartannat 9 röda och 9 blå. Hur många trianglar finns det vars hörn utgörs av punkter av samma färg?

8. Det finns en regelbunden 16-hörning. En *diagonal* är en sträcka som går från ett hörn till ett annat icke-angränsande hörn. Hur många par av diagonaler finns det som inte skär varandra?

9. Det finns 29 bokstäver i det svenska alfabetet. Hur många ”ord” med 10 bokstäver finns det där bokstäverna kommer i bokstavsordning om

(a) bokstäverna inte får upprepas?

(b) bokstäverna får upprepas?

3.3 Kombinatorik III: Bijektioner & kortlekar

Bijektioner

10. På fruktstunden tar ledarna fram två olika skålar: en i glas och en i plast.

(a) De har även 10 likadana bananer. På hur många sätt kan ledarna ställa fram frukt? En skål kan vara tom men alla bananer ska vara uppdelade.

(b) Hur många sätt blir det om de istället har 100 bananer?

11. Till kvällsfrukosten vill man ta fram ett antal tepåsar. Det finns obegränsat antal tepåsar av tre olika sorters te. Undersök hur många sätt man kan göra det på om det ska tas fram:

(a) 1 påse?

(b) 2 påsar?

(c) 3 påsar?

(d) 4 påsar?

(e) Hitta mönstret.

12. I följande deluppgifter krävs att du med ord förklarar varför svaret blir som det blir. Det är okej att hänvisa till tidigare uppgifter, men kopplingen måste i så fall göras tydlig.

(a) På hur många sätt kan 3 svarta bilar och 4 vita bilar fylla 7 parkeringsplatser? *Bilar av samma färg ses som likadana.*

(b) På hur många sätt kan man skriva en sifferstäng med fyra 0:or och tre 1:or?

(c) På hur många sätt kan 4 likadana äpplen fördelas på 4 olika korgar?

13. Valentina har 11 Mattekollo-t-shirts. Hon ska fördela dessa mellan totalt 4 ledare, men inte nödvändigtvis jämt.

(a) På hur många olika sätt kan hon fördela t-shirtsen?

(b) Om alla ledare ska få minst en t-shirt var? *Försök hitta två lösningsmetoder om du kan!*

14. Hur många 11-siffriga positiva heltal finns det, sådana att dess siffror åt höger är icke-minskande? Exempel: 12345678999, 55555555555, 22223335778.

Kortlek!

15. I ett rum finns 12 unika tallrikar. På hur många sätt kan dessa delas in i 3 grupper om 4?

16. Fredrik blandar en kortlek (52 olika kort).

(a) Hur många olika sätt kan korten i kortleken ordnas på?

(b) Fredrik visar nu att kortleken är perfekt sorterad, efter att han blandat dem. Vad är sannolikheten att han råkat blanda kortleken så att den blir perfekt sorterad? Tror du att Fredrik verkligen blandade slumpmässigt?

(c) Fredrik blandar nu korten igen, och påstår nu att han är säker på att korten *aldrig någonsin i världens historia i någon kortlek någonstans* varit i den ordningen som han blandat dem i nu. Är det sant?

17. En pokerhand består av fem kort från en vanlig kortlek.

(a) Hur många pokerhänder finns?

(b) Två spelare spelar poker mot varandra. Först tar den ena spelaren en pokerhand från kortleken och sen tar den andra spelaren en hand från samma kortlek. Hur många händer kan de ha fått?

(c) Vad är sannolikheten att den första spelaren fått en färgstege? (Alla kort i samma färg, och i ordningsföljd. Esset kan vara både 1 och 14.)

3.4 Pascals triangel

Pascals triangel konstrueras på följande sätt:

- Sätt en etta på första raden.
- För varje par av tal bredvid varandra på en rad, sätt ett tal mitt emellan dem på raden nedanför som är lika med summan av talen.
- Sätt en etta längst ut på varje sida av den nya raden för att färdigställa den.

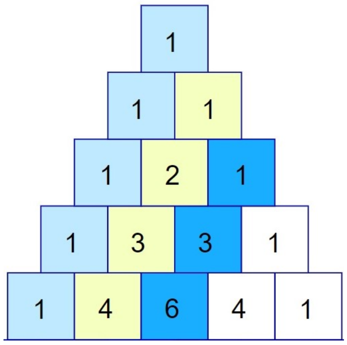
Istället för att börja på rad 1 kallas den första raden i Pascals triangel (raden med bara en etta) ”rad 0”. På samma sätt kallas det första talet i en rad ”tal 0”. Såhär ser rad 0 - rad 3 av triangeln ut:

18. Utöka triangeln ovan med rad 4 - rad 7.

19. **(a)** Visa att den andra diagonalen uppifrån är en lista med alla positiva heltal.

rad 0				1				
rad 1			1		1			
rad 2		1		2		1		
rad 3	1		3		3		1	

(b) Visa att den mörka (3:e) diagonalen är en lista med alla triangeltal.



20. **(a)** Visa att summan av talen på en rad i Pascals triangel är dubbelt så stor som summan av talen på raden ovanför

(b) Vad är summan av talen i rad nummer 20?

21. Visa att i en rad i Pascals triangel så är summan av talen på jämna platser lika med summan av talen på udda platser.

Antalet sätt som Leonid kan välja m böcker att köpa från ett urval av n böcker betecknas ibland $\binom{n}{m}$ och utläses *"n välj m"*. Det vill säga $\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$.

22. En väg i Pascals triangel börjar i den översta ettan och går antingen snett nedåt åt höger eller vänster ett antal gånger innan den stannar vid ett tal.

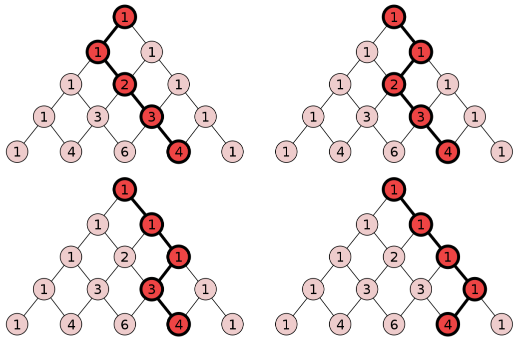
(a) Hitta alla vägar som slutar i tal 3 på rad 5.

(b) Visa att antalet vägar som slutar i tal m på rad n är lika med $\binom{n}{m}$.

(c) Använd (b) för att visa att tal m på rad n är lika med $\binom{n}{m}$.

23. **(a)** Vilken är den första raden efter rad 3 som bara har udda tal i sig?

(b) Vilken borde vara den andra raden efter rad 3 med bara udda tal i sig? Verkar det finnas ett mönster?



Samtliga vägar som slutar i tal nummer 3 på rad 4

24. (Pascals identitet) Visa att om $m \geq 1$ och $n > m$ så gäller att:

$$\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m} + \binom{n-1}{m-1}$$

25. Visa med hjälp av Pascals triangel att:

$$\binom{m}{m} + \binom{m+1}{m} + \binom{m+2}{m} + \ldots + \binom{n}{m} = \binom{n+1}{m+1}$$

26. Kan du hitta Fibonaccitalen i Pascals triangel?

27. Kan du hitta Sierpinsiktriangeln i Pascals triangel?

28. Hitta ytterligare ett coolt mönster i Pascals triangel.

4. Logik

4.1 Logik I

1. Vilka av meningarna nedan är påståenden?

   (a) 13.

   (b) Jag är en människa.

   (c) Jag är en bananfluga.

   (d) Solen är en liten gul ärta.

   (e) Fysik är bäst.

   (f) Matematik, Mattekollo och plustecken.

2. Vilka av följande påståenden är sanna?

   (a) Det är soligt och det är sommar.

   (b) Solen är en ärta eller jag är inte på Mattekollo.

   (c) Det är soligt eller det är sommar.

   (d) Jag heter Emil eller jag gillar glass.

3. Formulera negationer (matematiska motsatser) till följande meningar:

   (a) Det är soligt.

   (b) Det är varmt.

   (c) 7 är större än 5.

   (d) $5 + 2 = 7$

   (e) Ingen gris är söt.

   (f) Det finns minst en gris som är söt.

4. Formulera ett påstående som

   (a) alltid är sant.

   (b) alltid är falskt.

   (c) inte går att veta om det är sant eller falskt.

5. Vilgot tänker på ett av talen $1, 2$ eller 3. Du får ställa en fråga till Vilgot. På frågan svarar han ärligt ”ja”, ”nej” eller ”jag vet inte”. Vilken fråga kan du ställa för att säkert ta reda på vilket tal Vilgot tänker på?

6. På Apornas Planet bor det apor och människor, där bägge arterna kan prata. Varje invånare på planeten talar antingen alltid sanning, eller ljuger alltid. Om vi har individerna A och B som säger följande saker, vilken sort och art är de?

(a) A: ”Minst en av oss är en apa”, B: ”Minst en av oss ljuger”

(b) A: ”Vi är båda apor”, B: ”Vi båda ljuger”

(c) A: ”B är en apa som ljuger, jag är en människa”, B: ”A talar sanning”

7. En natt är fyra djurvänner ute och går på ett led i skogen; Åsnan, Lejonet, Papegojan, och Giraffen. Åsnan ljuger alltid, Lejonet talar alltid sanning, Papegojan upprepar det svar den hört senast (om den får första frågan svarar den slumpmässigt ”ja” eller ”nej”), Giraffen svarar det korrekta svaret på sin föregående fråga (på sin första fråga svarar den slumpmässigt ”ja” eller ”nej”).
De träffar på den kloka Igelkotten, som inte kan se i vilken ordning de går. Igelkotten vet hur djuren svarar, och bestämmer sig för att ta reda på ordningen genom att ställa frågor till dem. Den frågar alla i tur och ordning “Är du Åsnan?”, och kommer då endast fram till var Giraffen står. Därefter frågar den alla i samma ordning “Är du Giraffen?”, och kommer då endast fram till var Åsnan står. Tredje gången frågar den alla i samma ordning “Är du Papegojan?”. Det första djuret svarar ja, och Igelkotten utbrister triumferande “Nu vet jag hela ordningen!”.
I vilken ordning gick djuren?

4.2 Logik II

Varför mäter man cirkelns area i kvadratmeter, men inte kvadratens area i cirkelmeter?

1. Avgör om följande implikationer är sanna eller falska:

(a) Erika är brevbärare $\Rightarrow$ Erika har ett jobb

(b) Erika har ett jobb $\Rightarrow$ Erika är brevbärare

(c) Vi är på Mattekollo $\Rightarrow$ Det är sommar

(d) Det regnar ute $\Rightarrow$ Det är molnigt

(e) Det molnigt $\Rightarrow$ Det regnar ute

(f) Sveriges huvudstad heter Stockholm $\Rightarrow$ Vi är på Mattekollo

2. Avgör om följande implikationer är sanna är eller falska:

(a) Jag har inte varit i Oslo $\Rightarrow$ Jag har inte varit i Norge

(b) Jag har inte varit utanför Oslo $\Rightarrow$ Jag har inte varit utanför Norge

(c) Emma är inte pank $\Rightarrow$ Emma har inga pengar

(d) Minst en häst på Erken är röd $\Rightarrow$ Alla hästar på Erken är gröna eller någon annan färg

3. Avgör om följande slutledningar är sanna eller falska:

(a) Jag har en kudde. Alla kuddar är mjuka. Alltså äger jag minst en mjuk sak.

(b) Hermans tröja är grön. Alltså gillar Herman gröna saker.

(c) Solen skiner alltid i Karlstad. Solen skiner idag. Alltså är vi i Karlstad idag.

(d) x är större än 10. x är mindre än y. Då är $\frac{y}{2}$ större än 6.

4. Noé och Lucas ska spela fotboll. Noé säger att alla sporter är roliga och att matematik är roligt. Alltså drar Noé slutsatsen att matematik är en sport. Lucas säger att Noé har fel. Vem är det som har rätt? Hur skulle vi kunna omformulera påståendet så att det blir rätt?

5. A, B och C är påståenden.

(a) Antag att A $\Rightarrow$ C och C $\Rightarrow$ B är sant. Är A $\Rightarrow$ B sant eller falskt?

(b) Antag att A $\Rightarrow$ B, B $\Rightarrow$ C och C $\Rightarrow$ A. Är C $\Rightarrow$ B sant eller falskt?

6. När det regnar sitter katten i köket eller källaren. Om katten är i köket så sitter råttan i hålet och osten är i kylskåpet. Om osten är på bordet och katten är i källaren så är råttan i köket.

(a) Just nu regnar det och osten är på bordet. Var är råttan?

(b) Det regnar och råttan är i hålet. Var är osten?

(c) Det är inte sant att osten är på bordet och katten är i källaren. Kan råttan vara i köket?

7. Antag att B är utsagan $n > 2$ och:

(a) A är utsagan $n > 4$. Gäller det att A $\Rightarrow$ B? Varför eller varför inte?

(b) A är utsagan $n^2 > 4$. Gäller det att A $\Rightarrow$ B? Varför eller varför inte?

8. Antag att B är utsagan $n > 2$ och:

(a) A är utsagan $n > 4$. Antag också att A och B är falska. Går det att sätta en implikationspil mellan A och B?

(b) A är utsagan $n^2 > 4$. Antag igen att A och B är falska. Går det att sätta en implikationspil mellan A och B?

9. Oleg har en gammal våg som inte fungerar som den ska. Om någonting väger mindre än 1000g visar vågen korrekt men om något är tyngre eller väger precis 1000g kan vågen visa vad som helst över 1000g. Vi har 5 vikter A, B, C, D och E och alla väger under 1000g. När man väger dem i par visar vågen följande:

B+D	C+E	B+E	B+C	A+E
1200g	2100g	800g	900g	700g

Vilken vikt är tyngst?

10. Visa att om siffersumman av ett tal är delbart med tre så är även talet delbart med tre. Går det att visa att den omvända implikationen också gäller?

11. Pythagoras sats ser ut så här: A $\Rightarrow$ B

där A = "En rätvinklig triangel har sidlängderna a, b och c där c är den längsta sidans längd." och B = "$a^2 + b^2 = c^2$".

(a) Formulera omvändningen av Pythagoras sats, det vill säga B $\Rightarrow$ A.

(b) Bevisa omvändningen av Pythagoras sats.

5. Mattemonopol

5.1 Mattemonopol

I mattemonopol spelar ni som konkurrerande matte-företag. Spelet går ut på att tjäna pengar och att ha mer pengar än motståndarna när spelet är slut.

Deltagarna delas upp i 3 lag och de vill får de komma på ett lag/företagsnamn under själva spelets gång. I början får varje lag 4 M (4 miljoner fejkkronor). Spelet går ut på att köpa problem från marknaden och sedan sälja svaret för mer pengar. Men för varje gång som ett problem löses så blir det värt 1 M mindre för lag som löser problemet senare. T.ex. problem 1 kostar 1 M och ger först 4 M om man löser den. Lag 1 lämnar in en lösning först på problem 1 och får 4 M. Lag 2 lämnar in en lösning på problem 1 senare och får 3 M.

Om man svarar fel svar på ett problem så får man vänta 5 minuter tills man får svara på ett problem igen.

12. På en marknad samlas 25 personer från tre städer, Kil, Grums och Forshaga. De från Kil talar alltid sanning och alla från Grums ljuger alltid. Invånarna i Forshaga talar sanning varannan gång och ljuger varannan gång oberoende av varandra.
När alla på torget får frågan: "Är du från Kil?", svarar 17 "Ja".
När alla därefter får frågan: "Är du från Forshaga?", svarar 12 "Ja".
När till sist alla får frågan: "Är du från Grums?", svarar 8 "Ja".
Hur många på torget är från Kil?

13. Hur många niosiffriga tal kan skrivas med hjälp av siffrorna 1 till 9 (varje siffra används en gång) så att inga två udda siffror står bredvid varandra?

14. Det finns 25 heltalspunkter markerade på en tallinje. Hur många sträckor av udda längd med ändar i de markerade punkterna kan det maximalt finnas?

15. Det står en pjäs i det övre högra hörnet på ett 8x8-schackbräde. Benjamin och Madde turas om att flytta på den, Benjamin börjar. På ett drag ska man flytta pjäsen ett steg i en av tre riktningar: vänster, neråt eller diagonalt neråt-vänster. Man får inte flytta pjäsen i exakt samma riktning som motståndaren nyss gjorde. Spelet tar slut när det inte finns något drag mer. Markera alla rutor dit pjäsen skulle kunna komma under en spelomgång.

16. Om varje bokstav är kod för en unik siffra, hur många *SLAG* måste man summera för att det ska bli *OOOOOO*? (obs. att det är bokstaven *O*, inte siffran

0)

$$SLAG + SLAG + \cdots + SLAG = OOOOOO$$

17. Ivans hus har 8 vägguttag och 21 förgreningssladdar som kan koppla in 3 saker var. Hur många strykjärn kan Ivan koppla in samtidigt?

18. Nalle Puh och Nasse skär upp en tårta tillsammans. När tårtan var uppdelad så grät Nasse för att han ville ha en större bit tårta. Nalle Puh som är så snäll gav då Nasse en tredjedel av sin del. Nasses fick då 3 gånger så mycket tårta som han skulle fått först. Hur var tårtan uppdelad i början?

19. I ett Mattekollo långt långt borta följer eleverna Discord-kanalen så slaviskt att de läser varenda meddelande, och så fort det inkommer något nytt meddelande, hoppar de upp av glädje (ifall de inte skrev det själva förstås). Inför mattedrabbningen hoppade eleverna sammanlagt 440 gånger och det visade sig även att varje elev skickade samma antal meddelanden. Hur många elever kan det vara i kollot?

20. 11 personer kom till gröna gruppens lektion på Mattekollo. På hur många sätt kan de ske att vissa av dem tvättar händerna i rasten? (Kanske ingen alls gör det.)

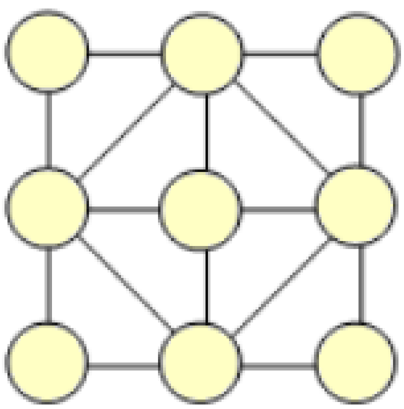
21. Hur delar man upp en rutig 6x6-kvadrat i fyra likadana figurer så att var och en av dem har omkretsen 20 rutor? Man får bara skära längs med rutgränserna.

22. Vilket är det största antalet nollor som kan stå i slutet på en produkt av tre positiva heltal, om summan av dessa tre tal ska vara 407?

23. Inuti varje ruta på en 3x3-tabell skrev man in ett tal. Summan av talen i varje rad blev 18, summan av talen i varje kolumn blev också 18, medan summan av talen i varje 2x2-kvadrat blev 25. Vilket tal kan stå i mitten av tabellen?

24. På hur många sätt kan man sätta ut 1:or och -1:or i rutorna på ett 3×3-bräde så att produkten av talen i varje rad och i varje kolumn blir lika med 1?

25. Skriv in alla siffrorna 1 till 9 i cirklarna, så att summan av siffrorna som bildar hörnen på en kvadrat är alltid en och samma.



26. Rita upp alla bilder där en uppsättning med (oändliga) linjer är på så sätt att varje linje skär exakt 6 andra. Bilderna räknas som olika om de har olika antal linjer.

27. I övre vänstra och övre högra hörnet på ett 3x3-bräde finns det var sin svart springare (häst) och nedre vänstra och nedre högra hörnet finns var sin vit springare. Hur många drag krävs det som minst för att vita och svarta springarna ska byta plats med varandra om man inte få gå till en ruta som är upptagen?

28. Bestäm antalet tresiffriga tal med siffersumma 23.

II Lektionsmaterial röda gruppen

1. Geometri

1.1 Triangelolikheten

Triangelolikheten hävdar att längden på en viss triangel sida är alltid kortare än längderna på två övriga sidor sammanlagt. Alltså i en triangel ABC gäller följande: Det gäller även i en omvänd riktning: om triangelolikheten stämmer för några tre

$$AB + BC > AC$$
$$AB + AC > BC$$
$$AC + BC > AB$$

längder, då går det att sammansätta en triangel vars sidor har dessa längder.

1. Vad kan man säga om tre sträckor AB, BC, AC om man inte har triangelolikhet, utan likhet, alltså om $AC = AB + BC$?

2. En likbent triangel har två av sidorna lika med 3 och 7. Hur lång är basen?

3. Sidan AC i en triangel ABC är 3,8 cm lång, medan sidan AB är 0,6 cm lång. Sidan BC mäts i ett helt antal centimeter. Vad är det lika med?

4. Bevisa att längden på valfri polygontåg är alltid minst lika lång som en sträcka mellan dess startpunkt och slutpunkt.

5. *Omvända triangelolikheten*
Bevisa att längden av varje triangel sida är större än differens av två resterande sidor.

6. Tänk en triangel ABC, där man dragit en median BM till sida AC. Bevisa att

(a) $BM < \frac{BA+BC}{2}$

(b) $BM > \frac{BA+BC-AC}{2}$

7. Bevisa följande påståenden för en konvex fyrhörning ABCD:

(a) $AC + BD > \frac{AB+BC+CD+DA}{2}$

(b) $AC + BD < AB + BC + CD + DA$

Det vill säga, att summa av längderna på fyrhörningens diagonaler är större än dess omkrets men mindre än själva omkretsen.

8. Tänk en triangel ABC och en valfri punkt D inuti triangeln. Bevisa att

(a) $AD + DC < AB + BC$;

(b) $AD + BD + CD < AB + BC + CA$;

(c) $2(AD + BD + CD) > AB + BC + CA$.

9. Bevisa att bland diagonaler av en konvex femhörning finns det tre sådana att det går att sammansätta en triangel från dem.

10. **(a)** Två byar ligger på olika sidor av en rak järnvägsbana. Vart ska man bygga en station om den får placeras så att avståndena till byarna sammanlagt är så litet som möjligt?

(b) Hur bör man göra om byarna ligger på samma sida av banan?

11. Efter att man ha byggt station, måste man även planera ett sjukhus, men nu för 4 byar som ligger alla på någon cirkel. Vart ska sjukhuset byggas för att avstånden sammanlagt blir så litet som möjligt?

12. Tänk en likbent triangel ABC, där $AB = BC$ samt $\angle BAC = 20$. Bevisa att

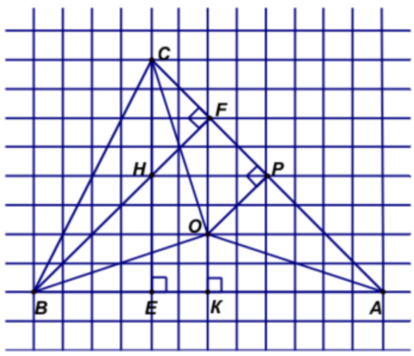
(a) $AB < 3 * AC$;

(b) $AB > 2 * AC$.

13. Inuti triangeln ABC valdes punkt M på så sätt att $\angle BAM = \angle ABC$, $\angle AMB = 100$, $\angle ACB = 70$. Bevisa att $BM < AC$.

1.2 Konstruktioner på rutorna

1. Titta på bilden bredvid och besvara följande frågor om de utmärkta punkterna:



- Hur fördelas sträckan AC av punkterna P och F? (vilken andel av AC utgör AP, PF och FC?)
- Finns det några likbenta trianglar på bilden?
- Hur fördelas sträckorna HF och CO av deras skärningspunkt?

2. Rita en likbent triangel vars hörn ligger i rutpapprets *skärningspunkter* (dvs rutornas hörn).

3. Det finns två skärningspunkter A och B givna. Hur hittar man speglingen av punkten A i punkten B?

4. Välj en sträcka vars ändpunkter är skärningspunkter, samt en skärningspunkt som inte tillhör sträckan. Hur drar man en linje som är

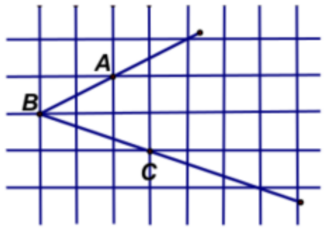
1. parallell
2. vinkelrät

med den valda sträckan?

5. Hur hittar man sträckans mittpunkt om sträckans ändpunkter tillhör skärningspunkterna? Kan man göra detta utan att använda linjal?

6. Hur drar man en vinkelrät linje genom mittpunkten av den angivna sträckan?

7. Räkna ut vinkeln $\angle ABC$ på bilden.



8. Dra bisektrisen för $\angle ABC$.

9. Rita en triangel med vinkelräta medianer. Triangelns sidor får inte innehålla befintliga rutornas sidor.

10. Tänk en kvadrat $ABCD$. Välj K på sida BC och M på sidan CD så att $BK = KC$ (alltså K är en mittpunkt på BC) och $CM = 2MD$. Bestäm $\angle MAK$.

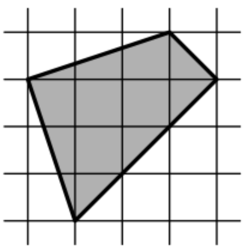
11. Kan man alltid rita en kvadrat vars hörn ligger på förbestämda tre parallella linjer?

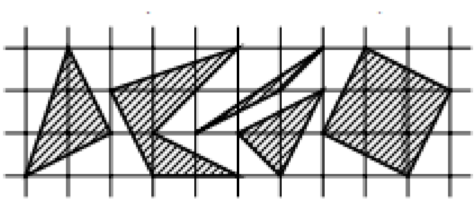
1.3 Area

För varje figur M på planen kan vi definiera **area** som ett motsvarande tal S_M, med följande egenskaper:

- Area kan inte vara negativt, $S_M \geq 0$,
- Areor av lika figurer är lika, $S_M = S_N$ om $M = N$,
- Består figur M av två figurer A och B som inte har gemensamma punkter, då är figurens M area summa av areor av A och B, $S_M = S_A + S_B$,
- Area av $k \times l$ rektangeln är lika med kl (bredden multiplicerat med längden).

1. Räkna ut area av figuren på bilderna nedan. Svara i antalet rutor.





2. Visa att ...

(a) . . . rätvinkliga triangelns area är lika med häften av produkt av dess kateters längder,

(b) . . . spetsvinkliga triangelns area är lika med hälften av produkt av valfri sidas längd och höjd som är dragen till denna sida (sidan kallas för *basen* i detta sammanhang),

(c) . . . föregående påståendet stämmer egentligen för alla trianglar,

(d) . . . parallellogrammens area är lika med produkten av valfri sidas längd och höjd dragen till denna sida,

(e) . . . parallelltrapetsens area är lika med produkten av dess höjd och medelvärdet av parallella sidors längder (*baser*).

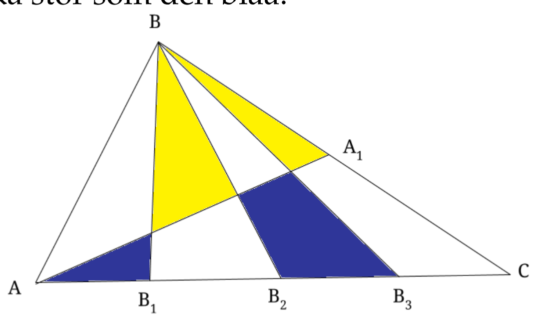
3. Hur stor area kan en triangel ha som störst, om den har två sidor vars längder är lika med 7 och 10?

4. Trapetsens $ABCD$ diagonaler träffas i punkten O. Bevisa att $S_{AOB} = S_{COD}$.

5. Visa att en median delar triangeln i två trianglar med lika stora areor.

6. Triangelns mittlinje är en sträcka som ansluter två mittpunkter av dess sidor. Visa att triangelns mittlinje skär en mindre triangel vars area är fjärdedel av stora triangelns area.

7. I triangeln ABC är punkten A_1 mittpunkten på sidan BC, medan punkterna B_1, B_2 och B_3 delar upp sidan AC i fyra lika långa sträckor. Visa att den gula arean är lika stor som den blåa.



8. **(a)** Två medianer av triangeln ABC, AK och BL korsas i punkt O. Visa att areor av trianglar AOL och BOK är lika.

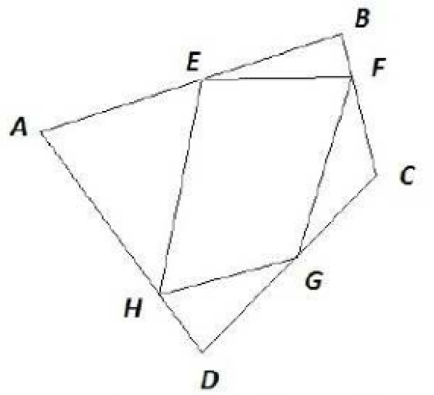
(b) M är mittenpunkt på tredje sidan (AB) av triangeln ABC. Drar man sträckan OM, så fördelas triangeln i 6 mindre trianglar: AOM, BOM, BOK, COK, COL, AOL. Visa att de alla har lika stora areor.

(c) Visa att alla tre medianer av en valfri triangel träffas i samma punkt. Denna punkt delar medianernas längder i relation 2:1.

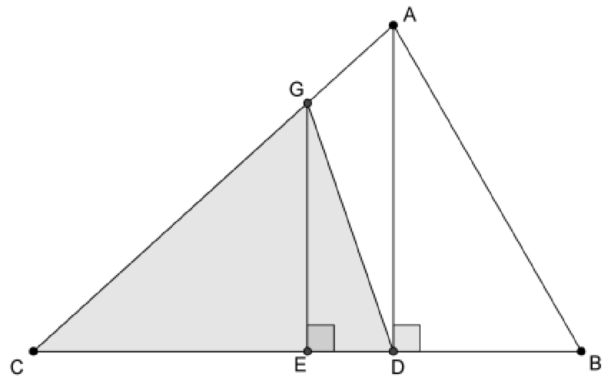
9. På fyrhörningen $ABCD$:s sidor har man satt ut punkterna E, F, G, H så som bilden visar så att $AE = BE$, $DG = GC$, $2BF = FC$ och $AH = 2HD$. Hur stor andel av $ABCD$:s area utgör arean av

(a) ...sexhörningen $AEFCGH$?

(b) ...fyrhörningen $EFGH$?



10. Visa att triangeln CGD och fyrhörningen $DGAB$, där E är mitten på BC, har samma area:



2. Algebra

2.1 Algebraiska uttryck

Algebraiska uttryck är en beräkningsformel som använder sig av algebraiska operationer och tal samt okända eller varierande tal som kallas för *variabler*. Detta gör man för att visa hur man räknar oavsett talets värde. Till exempel, vet man att summa av alla talen upp till 100 kan räknas som $\frac{100*101}{2}$. Man kan räkna precis på samma sätt summa av talen upp till 1000 och egentligen även för alla positiva heltal. Den summan kan skrivas ned som $1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$, där n är en variabel som denoterar ett valfri positivt heltal (t.ex. 100 eller 1000 som nämndes förr).

Som man redan sett, går det att beskriva samma beräkningsprocess på olika sätt, så ganska ofta vill man *förenkla* algebraiska uttrycket, skriva det på enklaste möjliga sätt.

1. Förenkla uttrycken:

(a) $2021^2 - 2021 \cdot 2021$

(b) $b(b+1)-b$

(c) $\dfrac{2^{10}}{2^3}$

(d) $\dfrac{x^{18}}{x^{12}}$

(e) $\dfrac{n!}{(n-2)!}$

(f) $\dfrac{(n-3)!}{(n-1)!}$

(g) $\dfrac{10^{n+1}}{10^{n-1}}$

2. Ibland vill man använda sig av *distributiva lagen* för att skriva om algebraiska uttryck på ett annat sätt. Man får en av välkända identitet $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ genom att notera att $(a+b)(a-b)=a(a-b)+b(a-b)=(a\cdot a-b\cdot a)+(b\cdot a-b\cdot b)=a^2-b\cdot a+b\cdot a-b^2=a^2-b^2$.

Träna att öppna parentes och förenkla uttrycken (skriv utan bråk):

(a) $\frac{(x+2)(x-3)+6}{x}$

(b) $\frac{n!k!(k+1)!}{(n-2)!(k-2)!(k-1)!}$

(c) $\frac{n!+(n-1)!}{n+1}$

3. Öppna parentes och förenkla även följande välkända uttrycken:

1. $(a+b)(a+b)$ (alltså $(a+b)^2$)
2. $(a+b)(a-b)$
3. $(a+b)(a^2-ab+b^2)$
4. $(a-b)(a^2+ab+b^2)$
5. $(a+b)(a+b)(a+b)$ (eller $(a+b)^3$)
6. $(a-b)(a-b)(a-b)$ (dvs $(a-b)^3$)

4. Bevisa att följande tal är sammansatta (det vill säga, att de delas av något annat positivt heltal som är större än 1): [label=**()**]
$2^{2022}-1$

$202120212020^3-202020202021^3$

5. Visa att a^n-b^n är sammansatt för alla positiva heltal $a,b : a>b$.

6. Visa att $3^{n+1}+3^{n-1}$ är delbart med 10 för alla positiva heltal n (utan att räkna rester).

7. Finns det några par av primtal sådan att differens av kvadrater av dessa primtal är också ett primtal? Hur många?

8. Förenkla $(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)$.

9. Två olika okända positiva heltal x och y valdes på så sätt att $x^2-2021x=y^2-2021y$. Vilka värden kan summa $x+y$ ta?

10. Är talet 2020^2+4041 ett primtal eller ett sammansatt tal?

11. Bevisa att $a^3(b+c)+b^3(c+a)+c^3(a+b)+abc(a+b+c)$ är sammansatt för alla heltal a,b,c.

12. Förenkla uttrycket

$$\frac{(a+c)(a+d)(b+c)(b+d)}{(a+b+c+d)^2}$$

för alla sådana a,b,c,d där $ab=cd$.

13. Förenkla uttrycket

$$\frac{a-b}{a+b}+\frac{b-c}{b+c}+\frac{c-a}{c+a}+\frac{a-b}{a+b}\cdot\frac{b-c}{b+c}\cdot\frac{c-a}{c+a}$$

.

2.2 Faktorisera och härska

Igår har vi räknat att

(a) $(a+b)^2 = a^2+b^2+2ab$

(b) $(a+b)(a-b) = a^2-b^2$

(c) $(a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3+b^3$

(d) $(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3-b^3$

(e) $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

(f) $(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2+b^3$

Idag skördar vi frukterna av hårt arbete.

1. Faktorisera (dvs skriv som en produkt av parenteser tills du inte längre kan fortsätta):

(a) x^3-xy^2

(b) $x^4y^2-2x^2yz+z^2$

(c) $36a^2-60ab+25b^2$

(d) $m^{13}n+mn^{13}$

(e) $b^3-\frac{1}{8}$

2. Faktorisera i primtal 102^2-1.

3. Visa att n^2+3n+2 är ett sammansatt tal.

4. Visa att talet $3^{100}-6^{50}+2^{98}$ är ett kvadrattal.

5. Anders minns att han råkade få 2017 när han räknade differens av två kvadrattal, men minns inte exakt vilka tal det var. Skulle du kunna hjälpa honom att komma ihåg det?

6. Visa att

(a) $37^{21}-18^{21}$ är delbart med 19.

(b) $17^{33}+22^{33}$ är delbart med 13.

(c) $22^{20}-12^{20}$ är delbart med 17.

7. Mira tycker att om a^2 är delbart med $a-b$ så är även b^2 delbart med $a-b$. Har hon rätt?

8. Valentina multiplicerar par av på varandra följande tal. Leonid hävdar att han kan skriva ytterligare två siffror på slutet av valfri sådan produkt utan att titta på det och ändå få ett kvadrattal. Skryter han kanske lite för mycket?

2.3 Andragradsekvationer

Andragradsekvation med en obekant x är en ekvation på formen $ax^2 + bx + c = 0$.

Faktorsatsen/Lilla Bézout sats. $x - k$ är en faktor till polynomet p(x) om och endast om det talet k är ett nollställe till p(x) (det vill säga, p(k)=0).

Faktorsatsen etablerar koppling mellan polynoms (inkl. andragradspolynom $ax^2 + bx + c$ faktorisering och dess rötter).

1. Lös följande andragradsekvationer genom att faktorisera dess andragradspolynomer:

[label=**()**, itemjoin=]

$x^2 - 3x + 2 = 0$

$9x^2 - 18 = 0$

$x^2 - 4x = -3$

$x^2 + 1 = 2x$

$2x^2 + 8x + 8 = 0$

$\frac{1}{8}x^2 + 1 = 0$

$x^2 + 2x + 10 = 0$

$4x^2 + 2 = -4x$

2. Hur många rötter kan en andragradsekvation ha?

3. Lös ekvationen $x(x+1) = 2021 \cdot 2022$.

4. Ludvig skrev en andragradsekvation med rötter 20 och 21, men sedan Sebastian busade och suddat bort allt förutom själva början $x^2 \dots$. Kan ni hjälpa Ludvig återställa ekvationen?

5. Visa att ekvationer $a^2x^2 + 20ax + 101 = 0$, $4x^2 + 4ax + 13a^2 = 0$ och $a^2x^2 + 2abx + b^2 + 1$ har inga lösningar oavsett värdet på parametrarna a och b. När har ekvationen $a^2x^2 + 2abx + b^2 + c$ en eller flera lösningar?

6. Vad krävs av parametrarna a, b och c för att andragradsekvationen $ax^2 + bx + c$ skulle ha en eller flera lösningar?

7. **(a)** Ludvig fick sitt mästerverk förstört igen, precis på samma sätt. Denna gång minns han bara att summa av rötter var 42, kan ni hjälpa honom och skriva tre olika passande ekvationer?

(b) Nu minns han att rötternas produkt var lika med 440. Finns det någon passande ekvation?

8. Hur räknar man ut Ludvigs ekvation om man känner till rötternas summa och produkt?

2.4 Andragradsekvationer II

1. Vilka rötter har ekvationen $a^2x^2+2abx+b^2-c^2$? I vilket fall har det bara en rot?

2. Karin övar på att lösa andragradsekvationer i form $4x^2+12ax+9a^2=0$. Vilket värde för parametern a får hon välja för att ekvationen ska ha 42 som sin rot?

3. För vilka värde av parametrar a,b,c har ekvationen

(a) $x^2+c=0$

(b) $4x^2+4x+c+1=0$

(c) $a^2x^2+2ax+c=0$

(d) $a^2x^2+2abx+c=0$

(e) $ax^2+bx+c=0$

två rötter? en rot? inga rötter?

4. Faktorisera andragradspolynom [label=**()**]

$ax^2+2bx+\frac{b^2}{a}-c^2$

ax^2+bx+c

Vad krävs för att faktorisering ska gälla? Kan man säga något om rötter av motsvarande andragradsekvationer?

5. Stämmer det alltid att om $b>a+c$ så har $ax^2+bx+c=0$ två rötter?

6. Hitta rötter av ekvationen $ax^2+bx+c=0$ för valfria reella tal a,b,c.

7. Vidar och Linus räknar rötter för liknande kvadratekvationer, $ax^2+bx+c=0$ respektive $ax^2+2bx+4c=0$. Linus fastnade i beräkningar och bad om hjälp, varpå Vidar tipsade att differens kuber av rötterna i hans ekvation är lika med 2021. Kan Linus åtminstone dra slutsats att hans ekvationer har en eller flera rötter?

8. Låt x_1 och x_2 vara rötterna till ekvationen $2x^2+x-4=0$. Skriv upp ekvationen med rötterna $x_1+\dfrac{1}{x_2}$ och $x_2+\dfrac{1}{x_1}$.

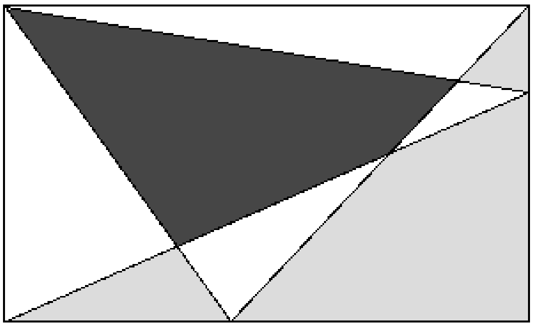
3. Mattedrabbning

3.1 Mattedrabbning

1. Femhörningen $ABCDE$ är sådan att $\angle ABC = \angle CDE$ samt $AB = ED$, $BC = CD$. Visa att även sträckor AD och BE är lika långa.

2. I ett Mattekollo långt långt borta följer eleverna Discord-kanalen så slaviskt att de läser varenda meddelande, och så fort det inkommer något nytt meddelande, hoppar de upp av glädje (ifall de inte skrev det själva förstås). Inför mattedrabbningen hoppade eleverna sammanlagt 440 gånger och det visade sig även att varje elev skickade samma antal meddelanden. Hur många elever kan det vara i kollot?

3. Några sträckor drogs inuti en rektangel. Bevisa att den svarta och den gråa arean är lika.

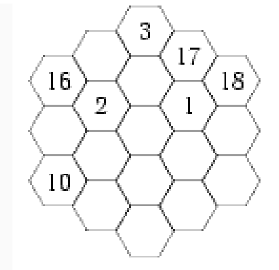


4. Leonid tänkte skriva en andragradsekvation men han kunde inte låta bli att spela Codenames samtidigt och av misstag blev det lite längre:

$$x^3 + x^2 + x + 1 = 0$$

Hur många rötter har denna ekvation?

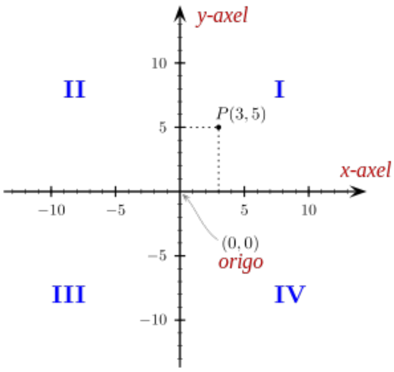
5. Skriv talen $1, 2, \ldots, 19$ i lediga celler av sexhörniga tabellen så att talsummorna i alla diagonala och vertikala rader är lika.



6. Linus och Vidar spelar i ”Arga Fredrik”. I sitt drag måste spelare dra bort en detalj från två olika robotar. Kan man inte göra det, så förlorar man. Vem vinner i ett parti med 5 robotar som består av respektive 100, 101, 102, 103 och 104 detaljer (det är Vidar som börjar)?

4. Grafer och funktioner

4.1 Grafer och funktioner



Grafen till funktion f är mängden av alla möjliga par $(x, y = f(x))$. Grafer erbjuder möjlighet till geometrisk tolkning av funktion. Det ritas på ett *kartesiskt koordinatsystem*, som består av ett *origo* (mittenpunkten), en *x-axel* (horisontell) och en *y-axel* (vertikal) som skär varandra i rät vinkel. Axlarna fördelar planen i fyra *kvadranter*.

Grafen till funktion $y = kx + b$ är alltid en rät linje.

7. Rita grafer till funktionerna [label=(), itemjoin=]

$y = x$

$y = -x$

$y = 2x$

$y = 2x + 3$

$y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$ genom att anmärka dess punkter på koordinatplanen. Hur många punkter behöver ni anmärka för att rita graferna?

8. I vilka punkter på koordinatplanen korsar funktionerna från föregående problem x-axeln och y-axeln? Skapar de trubbiga eller spetsiga vinklar mot x-axeln? Vad påverkar att vinkeln blir trubbig eller spetsig?

9. Efter att ha busat för mycket på lektion fick Ivan i uppgift att skriva hundra ekvationer av linjer som går genom origo. Kan ni hjälpa honom att spara tid och lista dessa på ett snabbt sätt? Hur gör man det för en valfri punkt på y-axeln?

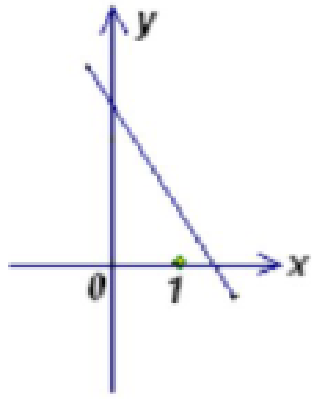
10. Vattnet i poolen värmdes kontinuerligt upp på 3 timmar från 0 till 30 grader, sedan höll man temperaturen i 2 timmar, och efter det svalnade vattnet av sig självt till 10 grader med takten 4 grader i timmen. Rita upp grafen för hur temperaturen berodde på tiden och bestäm när det var 18 grader varmt i poolen.

11. Grafen till en linjär funktion skär bort från den andra kvadranten en likbent rätvinklig triangel med kateter som är 3 långa. Bestäm ekvationen för denna linjära funktion.

12. Graferna till funktionerna $y = kx + b$ och $y = bx + k$ skär varandra. Bestäm x-koordinaten för skärningspunkten.

13. Kan linjen $y = kx + \frac{1}{k}$ skära bort en triangel som ligger i första kvadranten (som bildas utav linjen och koordinataxlarna)?

På bilden bredvid ser man grafen till funktionen $y = kx + b$. Rita upp graf till funktionerna
[label=(), itemjoin=]



$y = kx$

14. $y = b$

$y = kx - b$

$y = -kx + b$

$y = -kx - b$

Jämför $|k|$ och $|b|$ (absoluta värden av k och b).

4.2 Grafer till andragradspolynomer

1. Rita graf av funktion $y = x^2$ genom att plotta dess punkter på koordinatplanen. Rita en rät linje som skär grafen i två punkter; en punkt. Skriv ner deras ekvationer. Finns det linjer som inte skär grafen?

Andragradpolynoms graf är alltid spegelsymmetrisk, mittenpunkten till grafen kallas för *vertex* (det är där symmetrilinjen skär grafen). Skärningspunkter till x-axeln kallas för *nollställen*.

2. Vertexens x-koordinat är lika med -5, och ett av nollställena är $x_1 = 100$. Bestäm det andra nollstället av graf till andragradspolynomen.

3. Var hamnar vertex för graf till funktion $y = ax^2$? Hur ritar man samma graf fast med vertex förflyttad till [label=(), itemjoin=]

punkt (0; k)?

punkt (l; m)?
(tänk vad händer med variabler x och y när alla punkter förflyttas till viss avstånd...)

4. För vilka parametervärden c skär grafen till $y = x^2 + c$ x-axeln? För vilka parametervärden a, b, c gör det parabler $y = ax^2 + bx + c$?

5. Betrakta alla andragradsfunktioner på formen $y = x^2 + px + q$ där $p + q = 2021$. Visa att parablerna som utgör graferna till de här funktionerna går igenom en och samma punkt.

6. Kan vertexen för parabeln $y = 4x^2 - 4(a + 1)x + a$ ligga i den andra kvadranten för något värde på a?

7. Andragradsfunktionen $y = ax^2 + bx + c$ har inga nollställen och $a + b + c > 0$. Bestäm tecknet på koefficienten c.

8. Räkna diskriminanten och rötterna till andragradsekvationer
[label=(), itemjoin=]

$x^2 + 2bx + b^2 - c^2 = 0$

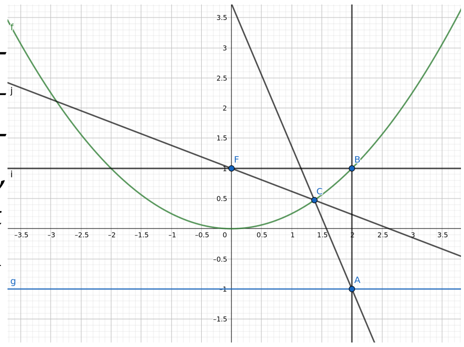
$x^2 + bx + c = 0$

$ax^2 + bx + c = 0$

Räkna sedan summa, differens och produkt av rötterna.

9. Visa att parabeln $y = ax^2 + bx + c$ skär från x-axeln en sträcka som är lika lång som rot ur motsvarande andragradsekvationens ($ax^2 + bx + c = 0$) diskriminant.

Grafen till $y = ax^2 + bx + c$ är en geometrisk kurva som heter *parabel*. Det definieras som *geometrisk ort* där punkter har lika avstånd till en förbestämd linje som heter *styrlinjen* (eller *directrix*, blåa linjen på bilden) och en förbestämd punkt som heter *brännpunkten* (eller *focus*, punkten F på bilden).



10. **(a)** Visa att alla punkter av $y = x^2$ tillhör parabeln med directrix $y = -0.25$ och brännpunkten $(0; 0.25)$.

(b) Visa det motsatta: att alla parabelns punkter har koordinater $y = x^2$

5. Gemensam tävling (röd och grön)

5.1 Skottlossning

Regler

I en stad finns fyra platser: torget, sjukhuset, intensivvårdsavdelningen och bårhuset. Alla börjar på torget. Varje deltagare får en lista med uppgifter. Alla får samma uppgifter. Man får bara lämna in svaren på uppgifterna i den (slumpmässiga) ordningen man får på en lapp i början av spelet. Vid varje inlämning får man antingen skjuta eller läka. Man får enbart skjuta på dem som befinner sig på samma plats i staden (till exempel, de på torget kan bara skjuta andra som befinner sig på torget). Man får bara läka sig själv. Oavsett vilket alternativ man väljer anger man vem som skjuts/läks, nummer på uppgiften och svaret på uppgiften. Om man svarar korrekt så går skottet/läkningen igenom.

Om man har en svarslapp redo för inlämning så räcker man upp handen och en ledare kommer fram och hämtar det. Var femte minut sker en skottlossning i staden. Om en deltagare har fler skott på sig än antalet gånger man läkte sig själv, så kommer hen att flyttas till en nivå neråt. **De första tio minuterna får man inte läka.**

Just på sjukhuset har man chansen att ta sig tillbaka till torget. Det sker om man vid en runda läker sig själv fler gånger än antalet gånger man blir skjuten på.

Om man hamnar på bårhuset är man ute ur spelet och får titta på.

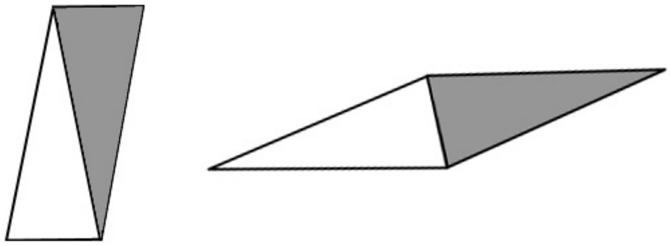
De som är kvar i spelet när tiden tar slut koras vinnare.

11. Kungen hade nio guldmynt som vägde 1 g, 3 g, 4 g, 6 g, 8 g, 9 g, 11 g, 12 g respektive 16 g. Robin Hood stal fyra av mynten, och lille John stal också fyra stycken. Det visade sig att Robin Hoods stulna guld vägde 3 gånger så mycket som lille Johns. Vilket mynt fick kungen ha kvar?

12. Det finns 12 kort med påståenden. På första står det ”Till vänster om mig ligger exakt 1 falskt påstående”, på andra ”Till vänster om mig ligger exakt 2 falska påståenden” och så vidare till sista kortet på vilket det står ”Till vänster om mig ligger exakt 12 falska påståenden”. Kalle lade alla korten på en enda rad. Vilket är det största möjliga antalet kort med ett sant påstående som kan finnas i raden?

13. Fyra tal är skrivna efter varandra. Medelvärdet av de två första är 7, medelvärdet av det andra och tredje är 2, medelvärdet av de två sista är -5. Beräkna medelvärdet av det första och det sista talet.

14. I figuren har två likadana likbenta trianglar formats till en parallellogram, den vänstra figuren. Parallellogrammens omkrets är 3 cm längre än omkretsen av en av de likbenta trianglarna. När samma trianglar formas om till en romb, till höger i figuren, blir rombens omkrets 7 cm längre än omkretsen av en av de likbenta trianglarna. Vilken omkrets har en av de likbenta trianglarna?



15. Kristina lade 2 apelsiner och 3 bananer i ena vågskålen och en citron i den andra. Vågen visade då jämvikt. Sen lade Kristina 5 apelsiner och 2 bananer i den ena vågskålen och 2 citroner i den andra. Återigen visade vågen jämvikt. Hur mycket väger en apelsin om en banan väger 100 g?

16. På ett lager fanns några likadana ostar. En natt kom sluga råttor dit och åt upp 10 av ostarna. Varje råtta åt lika mycket. Några råttor klarade dock inte av måltiden och fick ont i magen. Nästa natt kom de 7 råttorna som inte fick ont i magen och åt upp resten av osten. Dock fick varje råtta hälften så mycket som natten innan. Hur många råttor åt ostar under den första natten?

17. På hur många sätt kan 10 personer samåka i 5 bilar om det måste sitta två personer i varje bil?

18. Eleverna på Mattekollo började frukosten med en skål av naturell yoghurt. Den blev halvtom efter frukosten så de fyllde på den med vaniljyoghurt istället eftersom naturell yoghurt var slut. Under lunchtid åts ytterligare en tredjedel av yoghurtblandningen och då fylldes skålen på igen med vaniljyoghurt. Efter kvällsfikat åt eleverna bara en sjättedel av yoghurten i skålen, fyllde på den och åt upp blandningen helt och hållet nästa morgon. Hur mycket vaniljyoghurt åt eleverna? (ge svar i delar av skålvolym).

19. Hitta 8 på varandra följande tal där summan av de första fem är lika med summan av de övriga tre.

20. I hur många tresiffriga tal är hundratalssiffran större än entalssiffran?

21. På ett drag får man multiplicera talet med 2 eller addera 1 till talet. Vilket är det minsta möjliga antal drag som man behöver för att göra om 1 till 99?

22. Man adderade två på varandra följande tal och sedan bytte plats på de två siffrorna i resultatet. Då fick man det större utav de ursprungliga två talen. Skriv de ursprungliga två talen.

23. När spårvagnen öppnade dörrarna för första gången på dagen gick det in flera passagerare och de tog upp hälften av alla sittplatserna. Hur många passagerare kom in i början om man vet att antalet passagerare i spårvagnen ökade med exakt 8% efter den första hållplatsen och man vet att en spårvagn rymmer som mest 70 sittplatser?

24. En häxa numrerar svamparna i sitt förråd: 1, 2, 3, och så vidare. Varje gång hon skriver upp ett tal som är delbart med fyra dyker det upp en ny (onumrerad) svamp. Häxan blev äntligen klart när hon skrev upp talet 2021. Hur många svampar hade hon när hon började numrera dem?

25. På tavlan står talen 120 och 51. På ett drag får man skriva upp en (positiv) skillnad mellan två tal som redan finns på tavlan. Vilket är det största nya talet som kan skrivas upp på tavlan?

26. Familjen Fungelsam består av mamma, pappa och ett antal barn. Medelåldern på alla i familjen är 18 år. Utan den 38-åriga pappan är medelåldern 14 år. Hur många barn finns det i familjen Fungelsam?

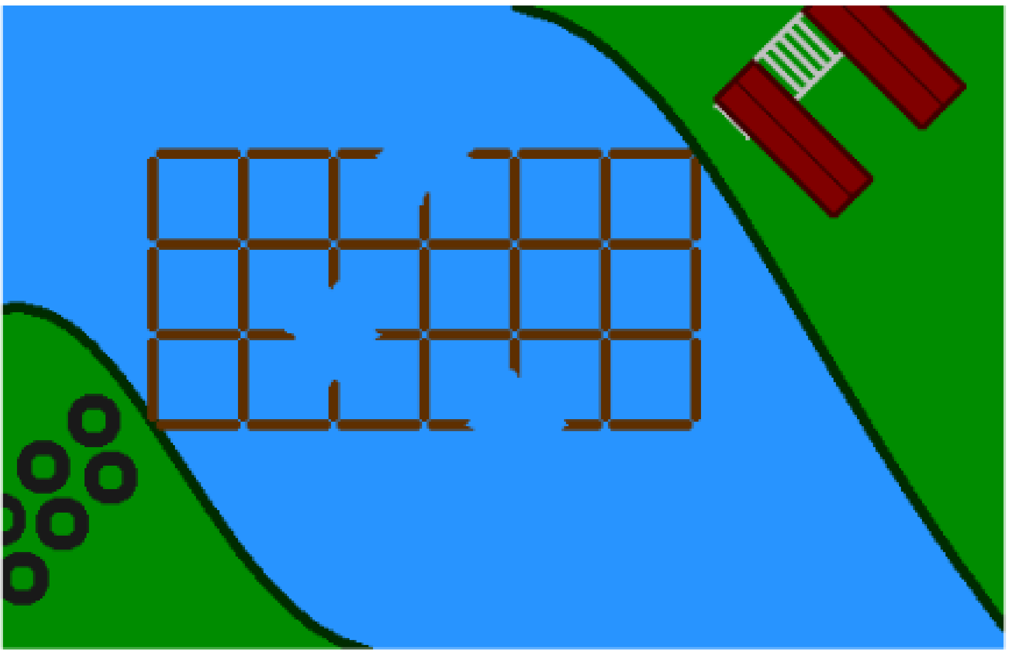
27. Fem procent av tre procent av talet 8 är tre procent utav fyra procent av vilket tal?

28. Om man ritar ut konturerna till en triangel och en fyrhörning, hur många områden kan ett oändligt papper som mest delas upp i av linjerna?

29. Vilken är startsiffran (längst till vänster) på det minsta positiva heltalet som har siffersumma 120?

30. Vilka primtal är 10! delbart med?

31. Över bäcken finns det ett antal plankor med samma längd. Tyvärr har de gått sönder på tre ställen.



Hur många olika kortaste vägar från däcken till husen finns det? Du får bara gå på plankorna.

III Lektionsmaterial programmering - Nybörjare

1. Introduktion till programmering

Idag ska vi gå igenom vad en robot är, hur programmeringsmiljön ser ut och skriva våra första program. Vi kommer gå igenom hur vi får roboten att röra sig, hur vi styr klon och att läsa av vissa sensorer. I dagens lektion kommer ni använda er av de blåa motorblocken, rosa körblocken, lila ljudblocken och turkosa sensorblock.

Uppgift: Fyrkanten

Programmera roboten att åka i en fyrkant med rotationer

Vad man kan variera

Testa med tid, rotationer eller grader. Vad är det för vinkel som grader och rotationer mäter? Hur kan man få roboten att svänga exakt 90 grader? Går det att räkna ut? Stämmer uträkningen med verkligheten?

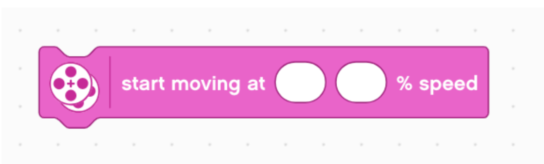
Var används detta på riktigt?

För att kalibrera robotar brukar man programmera dem att åka i en fyrkant. Man kan få ut mycket information från ett så litet program:

1. Att roboten inte drar snett när den åker rakt. Skulle roboten åka snett kan motorerna vara olika slitna, eller hjulen ha olika diameter
2. Att roboten åker rätt längd på varje raksträcka (och lika långt).
3. Att roboten svänger precis 90 grader i varje sväng.

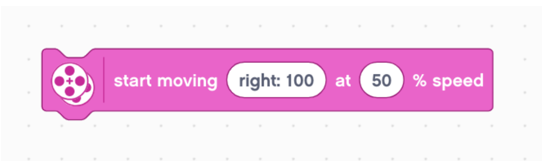
Uppgift: Olika svängblock

Det finns flera block som får roboten att göra exakt samma sak. Vad ska man skriva i de två tomma fälten i kör-blocket för att det ska göra samma sak som följande block? Försök resonera er fram till svaret innan ni testar!

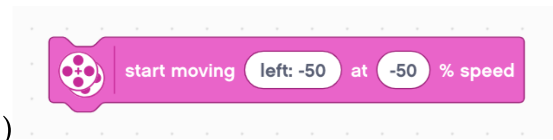


a)

b)



c)



Uppgift: Lagerroboten

Placera ut en läskburk framför roboten som den ska ta tag i och flytta. Här måste ni använda ett motorblock för att styra klon.

Vad som kan varieras

Man kan testa att ändra hastighet som klon stängs eller öppnas. Man kan göra detta på olika sätt; tid, rotationer eller grader. Vad är nackdelen med att använda rotationer eller grader?

Nu vill vi utveckla vår lagerrobot så att vi inte behöver fånga burken på en utsatt tid, eftersom vi förlorar lite tid när motorn står i dödläge". Istället vill vi använda en sensor som märker när det är tillräckligt stängt. Programmera om roboten så att den stänger klon tills trycksensorn är intryckt.

Var används detta på riktigt?

En robot måste manipulera verkligheten för att få kallas robot, annars är det bara en maskin. Nu får du lära dig att programmera roboten till att utföra sysslor istället för att bara åka omkring. Det kan t.ex. vara att hämta läsk från kylen när man sitter framför TVn.

Lagerrobotar runt om i världen arbetar såhär. De plockar upp ett objekt och transporterar det från punkt A till punkt B. Det kommer att revolutionera transportindustrin. En taxibil behöver ingen förare om den klarar av att köra mellan olika adresser på egen hand.

I stort sett alla mekanismer använder ändlägessensorer för att veta när man kan sluta köra en motor. T.ex. i en 3D skrivare sitter trycksensorer i varje ände av rörelsen för att den inte ska ha sönder sig själv. När trycksensorn trycks in vet 3D skrivaren att den ska sluta flytta skrivarhuvudet. Likadana sensorer sitter förresten i vanliga skrivare också! Och i det mesta som rör sig.

Uppgift: Ultraljud

Ställ upp ett hinder, exempelvis en kartong, ungefär 40 cm från roboten. Programmera sedan roboten till att komma så nära hindret som möjligt utan att välta det med hjälp av en ultraljudssensor. Använd dig av ett sensorblock för att vänta in att avståndet minskar.

Vad som kan varieras

Avståndet innan roboten stannar. Undersök hur långt som sensorn klarar som mest respektive minst. Notera att sensorn har ett minimumavstånd som den inte kan se kortare än för inget ljud ekar tillbaka till receptorn. Små objekt på långt avstånd är också svåra att upptäcka med ultraljud. Testa hur små objekt som kan detekteras och på vilka avstånd!

Var används detta på riktigt?

Ni har byggt en robot som reagerar på ultraljud. En människa kan inte höra ultraljud, men en fladdermus kan. En fladdermus navigerar med hjälp av ultraljud precis på samma sätt som er robot. Den skickar ut en högfrekvent signal och mäter tiden det tar för ekot att komma tillbaka, med lite matte kan fladdermusen då räkna ut hur långt det är till kvistar och grenar i skogen.

Uppgift: Stopplinjen

Åka fram tills roboten ser en linje. Samma sak som föregående uppgift, fast man använder en ljussensor istället för en ultraljudsensor för att ge roboten syn. Roboten ska stanna när den ser linjen.

Vad som kan varieras

Framför linjen kan en colaburk placeras, så att roboten kan åka fram tills den ser linjen och plocka upp colaburken.

Var används detta på riktigt?

Ljussensorer används överallt i industrin! Det är ett viktigt redskap för att ge robotar syn där kameror är för dyrt. Många robotar reagerar på linjer så att de inte kör fel.

Uppgift: Inbrottslarm

Programmera ett inbrottslarm som väntar på att något ska komma framför US-sensorn (US = **U**ltra**S**onic = ultraljud) och sedan tjuter!

Vad som kan varieras

Låt roboten aktivera klon samtidigt som den låter. Så kan den slå till inbrottstjuven! Testa olika tröskelvärden på avståndssensorn.

Se hur den kan övervaka en dörr och reagera när någon försöker ta sig in. Försök att smita förbi larmet utan att bli upptäckt. Testa att sätt flera robotar på olika höjd (en på golvet, en på en stol, en på ett bord och en på en stol på ett bord) och ta sig förbi. Sätt en på en stol på ett bord och försök köra virtuell limbo: Försök ta er under den osynliga ultraljud-strålen utan att utlösa larmet! Vem klarar det?

Var används detta på riktigt?

Inbrottslarm! Behöver jag säga något mer?

Uppgift: Tetris

Om du kan läsa noter kan du låta roboten spela upp den ryska folkvisan som används i spelet Tetris.

Tetris (Kalimba)

Russian Folk Song

Arranged by Holden Stogsdill

Composed by Nikolay Nekrasov

Vad som kan varieras

Testa att spela in en annan låt.

Uppgift: Byta plats på burkar

Placera ut två läskburkar och programmera roboten att byta plats på dem. T.ex. en fanta- och en colabruk. Roboten måste först flytta fantaburken till en temporär lagringsplats innan de flyttar colaburken till platsen där fantan stod, för att sist åka till fantaburken och flytta den till läskburkens plats. Detta kräver stor noggrannhet och det är viktigt att roboten startar på exakt samma ställe varje gång. Ställ burkarna relativt nära varandra för att roboten inte ska komma helt bort sig när den svänger och kör.

Vad som kan varieras

Positionen av burkarna kan förändras. Står de långt ifrån varandra blir det svårt.

Var används detta på riktigt?

Lagerrobotar måste ibland byta plats på saker för att ha saker som är mest populära närmast. På Clas Ohlson lagret vet jag att de optimerar så att produkter som ofta tar slut är närmast lastbilarna för att snabbt komma iväg till butik.

Uppgift: Räkna linjer

Räkna linjer och stanna efter att roboten passerat 4 linjer. Det är inte så enkelt som man kan tro.

2. Introduktion till programmering II

Idag ska vi gå igenom loopar, valblock (if-satser) och funktioner. Vi kommer även visa fler sätt att läsa av sensorer.

Robotar upprepar ofta samma sak om och om igen. T.ex. en industrirobot som ska tillverka bilar måste göra om samma monteringssteg hundratals gånger. Då används loopar! Loopar är bra för att slippa dra ut samma block flera gånger i rad. Som programmerare spar du tid!

Loopar kan också kallas för upprepningar eller repetitioner. Vissa kallar det för snurror eller slingor eftersom programmet snurrar runt och gör samma sak om och om igen, i mjukvaran kan ni också se små pilar som pekar runt programflödet.

Valblock används där roboten måste göra olika saker beroende på sin omgivning. Om du är vilse ringer du mamma, medan om du är hungrig ringer du pappa.

Funktioner används för att gruppera flera mindre kodblock i ett superblock som utför större uppgifter. Som att skapa en funktion för att laga pannkaka som består av blocken för att knäcka ägg, hälla upp mjölk, blanda smet och steka smeten. Då kan man senare bara anropa blocket för att steka pannkaka istället för de individuella uppgifterna.

Uppgift: Åka fram och tillbaka

Programmera en robot att åka fram och tillbaka mellan två svarta streck på marken. Det blir ungefär som uppgiften igår då roboten skulle stanna vid en svart linje, men nu ska den byta riktning eller börja backa istället.

Vad som kan varieras

Istället för att använda streck kan man ha en ultraljudssensor som känner av väggar. Roboten kan alltså åka mellan de två väggarna i korridoren utanför klassrummet och patrullera.

Var används detta på riktigt?

Om en robot ska vakta ett industriområde (eller en dörr) behöver den åka fram och tillbaka mellan två markeringar och hålla koll på vad som händer. Robotar gör ofta väldigt enformigt arbete som människor inte vill göra.

Uppgift: Åka i en kvadrat, fast med en loop

Programmera roboten att åka i en kvadrat, fast med en loop. Här kan ni inte loopa för evigt utan bara 4 iterationer. Vad är fördelarna med att använda en loop här?

Vad som kan varieras

Storleken på fyrkanten. Antal varv man ska åka runt i fyrkanten. Enkelt att ändra bara en siffra istället för att lägga till 8 nya block för varje varv.

Var används detta på riktigt?

Programmerare är lata. Genom att använda loopar slipper man mycket arbete. Det är bättre att programmet automatiskt upprepar saker istället för att man ska lägga ut många block.

Uppgift: Städroboten

Hålla sig inom ett område och städa rent det. Varje gång roboten ser en linje ska den backa, svänga och köra framåt igen. Puttar ut alla läskburkar från området till slut.

Vad som kan varieras

Storleken på området. Man skulle också kunna lägga till något så att programmet avslutas när roboten städat ett tag (begränsar antal loop-iterationer).

Var används detta på riktigt?

Kan användas för att ”städa” ett bord (puttar ned allt på golvet). Ungefär som en städrobot eller dammsugarrobot. Gräsklipparrobotar brukar ha en linje/slinga runt hela trädgården som roboten ska hålla sig innanför.

Uppgift: Undvik att krocka!

Undvika att köra in i något. Samma som uppgift 2 (städroboten) fast man väntar på att roboten ska känna av något med ultraljudssensorn istället.

Vad som kan varieras

Området som ska köras runt. Kan vara bara på golvet och undvika väggar och kartonger och stolar. Dock har ultraljudssensorn svårt att känna igen smala bords- och stolsben.

Testa att slumpa vinkeln som roboten svänger för att ta sig runt snabbare.

Var används detta på riktigt?

Detta är på samma sätt som robotdammsugare fungerar. En robotdammsugare krockar i saker och märker det och backar och svänger. Er robot är till och med bättre eftersom den inte behöver slå i någonting, den reagerar innan den krockar i nått!

Vanliga dammsugarrobotar är optimerade för att så snabbt som möjligt täcka av ett rum. Men eftersom roboten inte på förhand vet hur rummet ser ut används ofta slumpen och statistiska metoder för att öka chanserna att snabbt städa hela rummet.

Uppgift: Linjeföljare

Få roboten att följa en linje på golvet. Bryt ned enkla mänskliga instruktioner fföl j en linjetill en sekvens av instruktioner som en dator förstår. Det är inte det enklaste att förstå hur roboten ska följa en linje.

Vad som kan varieras

Hur linjen ska dras. Testa att göra olika skarpa linjer eller korsningar och se vad som händer.

Var används detta på riktigt?

Linjeföljande robotar finns överallt! Det finns tävlingar med dem, och de används i industrin. Många robotar guidas av kablar. En robotgräsklippare hittar tillbaka till laddstationen med hjälp av en guidekabel som den följer på samma sätt som ni precis gjort. En förarlös bil ser linjerna på vägen och följer dem.

Uppgift: Följ linjen tills den hittar en burk

Följ linjen tills roboten hittar en burk. Fånga den och sen fortsätta följa linjen.

Vad som kan varieras

Istället för att fortsätta följa linjen med burken kan man fånga den vrida roboten 90 grader och köra av linjen och släppa burken, för att sen backa tillbaka till roboten känner av linjen och vrida upp sig och fortsätta följa linjen!

Istället för en burk kan man ställa ett hinder längsmed linjen som roboten ska detektera och köra runt, och sedan fortsätta på andra sidan. Man kan också låta linjen upphöra på ett ställe och fortsätta längre fram. Då ska roboten upptäcka att linjen tog slut och sedan fortsätta följa den längre fram. Detta är en svår uppgift att lösa med endast en ljussensor, men det går! Testa att både klara av hinder och gap längsmed linjen.

Var används detta på riktigt?

Robotar på ett pappersbruk förflyttar stora pappersrullar genom att följa linjer på golvet.

Det är ofta det kommer fram en människa framför transportroboten och då måste roboten såklart kunna stanna! Annars dör människan. Ännu bättre vore förstås om roboten kunde köra runt människan.

Uppgift: Sluta följa linjen när den kommer till vit markering

Sluta följa linjen när den kommer till en vit markering.

Vad som kan varieras

Man kan med fördel placera en burk i slutet av linjen som roboten ska gripa tag i och förflytta!

Var används detta på riktigt?

Robotar använder sig ofta av något som kalla beacon, vilket betyder markörer på svenska. Dessa använder roboten för att veta var den befinner sig. De kan bestå av t.ex. färgmarkeringar eller saker som sänder ut strålning som roboten reagerar på.

Uppgift: Håll ett konstant avstånd

Försök att hålla ett visst avstånd till ett föremål framför den, t.ex. din hand eller en kartongskiva. Roboten ska backa om kartongen kommer för nära, och köra framåt om kartongen flyttas bort från roboten.

Vad som kan varieras

Olika avstånd. På hur långt avstånd kan den maximalt följa med? Vad händer om du rör föremålet för snabbt? Vad händer om den tappar bort föremålet? Lägg till någon form av sökbeteende? Kan ni sätta flera robotar i rad som följer varandra?

Går att skapa en P-regulator, vilket betyder att den åker fortare om kartongen är långt ifrån gränsen, och långsammare om den är nära avståndsgränsen.

Var används detta på riktigt?

Volvo utvecklar just nu fordonståg där lastbilar kör utan förare. Det finns en förare i första lastbilen som styr, sedan lägger sig flera andra på ett fast avstånd till bilen framför. Detta för att det blir billigare att slippa betala lön till förarna i lastbilarna längre bak, dessutom spar de bränsle eftersom de kan ligga väldigt tätt och få bort luftmotstånd.

Uppgift: Gyroregulator

Gyroregulator, får roboten att åka rakt med hjälp av att läsa av värdet från gyrot.

Vad som kan varieras

Försök få roboten att klara så stora störningar som möjligt. Lägg ut papper framför roboten som gör att hjulen spinner/slirar. Eller lägg ut andra små störningsmoment, kanske tändstickor om vi har några. Knuffa på roboten.

Lägg till ett ljud som säger Äj"eller "uschöm nån puttar på roboten för mycket.

Var används detta på riktigt?

Att köra rakt trots störningar är viktigt. Världen är sällan helt ideal och ska man göra en robust robot måste den använda sig av sensorer för att ta sig fram. Om man bygger en skogsrobot som ska ta sig fram över stockar och stenar används ofta gyrosensorer.

Uppgift: Räkna linjer

Kör fram till en vägg och räkna antalet linjer som roboten har passerat fram tills dess (krävs en variabel). Skriv ut antal passerade linjer på skärmen.

Vad som kan varieras

Antal linjer.

Var används detta på riktigt?

Variabler är bra för att kunna komma ihåg saker som har skett tidigare.

Uppgift: Styra roboten manuellt

Ge roboten möjlighet att bli styrd med hjälp av dess knappar på skärmen. Trycker man på pil uppåt ska roboten åka ca 10cm framåt. Trycker man på bil bakåt ska den åka bakåt. Pil höger roterar den 90 grader höger och pil vänster blir 90 grader åt vänster.

Vad som kan varieras

Om man trycker på mittenknappen ska klon öppnas om den är stängs, och stängas om den är öppen.

Var används detta på riktigt?

Ibland klarar inte en robot av att ta rätt beslut. Roboten kanske hamnar i en situation som den aldrig tidigare varit i och vet inte vad den ska göra. Då är det bra om en människa kan gå in och styra roboten rätt. Det kan också vara bra om roboten gör något farligt och man måste manuellt flytta tillbaka roboten, för ofta är de för tunga för att flyttas av muskelkraft.

Uppgift: Funktion för att åka rakt

Skapa en egen funktion som tar in cm som roboten ska åka istället för varv eller grader.

Vad som kan varieras

Bygg vidare på funktionen för att köra rakt och lägg in en gyro-regulator så att den alltid kör rakt oavsett om det är ojämnt underlag.

Var används detta på riktigt?

Bra med funktioner som man kan återanvända fler gånger. Dessutom bra att kunna ange i enheter som är enklare att relatera till. Skapar mindre fel då.

Uppgift: Funktion för att svänga

Skapa ytterligare en funktion som tar in antal grader roboten ska svänga. Testa att gör den **utan** gyro-sensorn, utan med matematik som räknar ut hur långt motorerna ska svänga för att uppnå en viss vinkel. Använd variabler.

Vad som kan varieras

Bygg vidare på funktionen ovanför och ange en svängradie på svängen, istället för att alltid svänga kring robotens centrum. Då kan man ange hur stor cirkel robotens centrum ska förflytta sig längsmed.

3. Introduktion till Python I

Idag ska vi gå igenom Python och använda det för att lösa några programmeringsproblem.

Glöm ej: Kommentarer!!!!

3.1 Operatorer

Operatorer är tecken eller ord som används för att kombinera och manipulera variabler. Det finns många operatorer i Python. Några av de viktigaste (förutom +, -, *, /, =) finns i tabellen nedan.

Python	**Matematik**	**Beskrivning**
`x // y`	$\left\lfloor \frac{x}{y} \right\rfloor$	x delat med y avrundat nedåt
`x % y`	$x \pmod y$	Resten av x vid division med y
`x ** y`	x^y	x upphöjt i y
`x += y`	$x \leftarrow x+y$	Samma som `x = x + y`
`x *= y`	$x \leftarrow x \times y$	Samma som `x = x * y`

Tilldelningsoperatorerna `-=`, `/=`, `%=`, osv följer samma princip.

≫ Testa att ni förstår vad alla operatorerna i tabellen ovan gör genom att använda dem i pythonterminalen.

≫ Vad blir resultatet av `-3//4` och `-3%4`? Gissa innan ni testar.

≫ Valentina skapade en uppgift till sina elever på Mattekollo med texten: *"Räkna ut värdet av X i följande uttryck:*

$$X = n_1^{p_1} + n_2^{p_2} + \cdots + n_N^{p_N}$$

där n_1, n_2 till n_N är heltal och p_1, p_2 till p_N är ensiffriga heltal."

Tyvärr är inte Valentina så duktig på Discord så när hon klistrade in uppgiften där formaterades texten om och alla upphöjt i försvann ...

Då såg det istället ut såhär:

$X = n1p1 + n2p2 + \cdots + nNpN$

Till exempel kommer en originaluppgift som ser ut såhär $X = 21^2 + 125^3$ att förändras till $X = 212 + 1253$.

Kan du skapa ett program som givet Valentinas nya problemtext ändå räknar ut den ursprungliga summan?

Ditt program ska först läsa in antalet termer N, och sen läsa in alla sammansatta tal np och skriva ut den summa som Valentina förväntade sig.

Koden nedan är ett exempel på hur man kan läsa in indata och skriva ut resultatet på detta problem. Använd alla de fyra första operatorerna i tabellen ovan i er lösning.

```
print("Skriv in antal termer: ")
N = int(input()) #Läs in antal tal
sum = 0 #Initiera summan till 0
for i in range(N): #Loopa igenom talen i indata
    print("Skriv in ett tal: ")
    tal = int(input()) #Läs in ett tal
    ??? #Räkna upp summan
print(sum) #Skriv ut resultatet
```

3.2 If-satser

För att program ska kunna välja att göra olika saker används if-satser. If-satser kräver ett booleskt värde (något som är antingen sant eller falskt). Booleska värden kan skapas genom att skriva `True` eller `False` eller med en jämförelse som i tabellen nedan.

Python	**Matematik**	**Beskrivning**
`x == y`	$x = y$	x är lika med y
`x != y`	$x \neq y$	x är inte lika med y
`x > y`	$x > y$	x är större än y
`x >= y`	$x \geq y$	x är större än eller lika med y
`x < y`	$x < y$	x är mindre än y
`x <= y`	$x \leq y$	x är mindre än eller lika med y

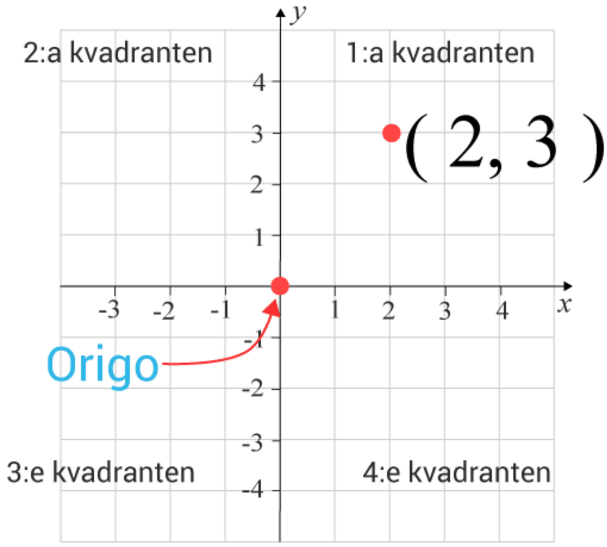
En if-sats i python kan se ut så här

```
if 3 > 5:
    print('3 är störst')
else:
    print('5 är störst')
```

Man kan kombinera booleska variabler med operatorerna nedan:

Python	**Matematik**	**Beskrivning**
`not a`	$\neg a$	inte a
`x and y`	$x \wedge y$	x och y
`x or y`	$x \vee y$	x eller y

≫ Skriv ett program som tar in en x- och y-koordinat och skriver ut i vilken kvadrant den punkten ligger i. Varken x eller y kommer att vara 0.



Koordinatsystem

3.3 Listor

En lista i Python är en ordnad sekvens av objekt (t.ex. strängar eller nummer). Man kan lägga till nya element (objekt) eller ändra de som redan finns hur mycket man vill. Listor skapas genom hakparenteser, och alla listelementen måste åtskiljas av ett kommatecken. Objekten som lagras kan vara av vilken typ som helst (man kan till och med lagra listor inuti listor). Man kommer åt objekten på samma sätt som man kommer åt tecknen i en textsträng, med indexering och hakparenteser. Lista ut vad som händer på varje rad i exemplet nedan och hur listan ser ut efter varje rad.

```
ledare = ['Valentina', 'Benjamin', 1]
ledare[2] = 'Madde'
ledare += ['Fredrik']
print(ledare[0])
```

Ni kan se hur den ser ut genom att skriva ut den:

```
print(ledare)
```

Man kan skapa listor med många likadana element så här

```
ettor = [1] * 35
```

För att kolla hur lång en list är kan man använda `len`

```
len(ettor)
```

Man kan beräkna summan av elementen i en lista med `sum(list)`, man kan sortera en lista med `list.sort()`, man kan lägga ihop två listor med + och det finns många andra inbyggda funktioner för listor som man kan googla sig till.

Tilldelningar med listor skapar normalt inte en kopia, utan en referens till samma lista. Oavsett vilken lista man modifierar kommer båda listorna att ändras.

≫ Vad tror ni att koden nedan kommer skriva ut? Fundera innan ni testar.

```
a = [1, 2]
b = a
b[0] = 4
print(a)
```

3.4 While-loopar

En While-loop upprepar några instruktioner så länge villkor uppfylls. Instruktionerna som ska upprepas är indenterade på samma sätt som för if-satser. Skriv av och kör programmet nedan och försök lista ut hur det fungerar:

```
i = 0
while i < 8:
   print(i)
   i = i + 1
```

Programmet nedan räknar ut summan av talen från 1 till 20.

```
i = 1
summa = 0
while i <= 20:
   summa = summa + i
   i = i + 1
print(summa)
```

≫ Modifiera programmet ovan så att det istället beräknar produkten av heltalen från 5 till 15.

≫ Collatz problem är ett olöst problem inom talteorin. Problemet utgår från en räknelek som börjar med ett positivt heltal n. Nästa steg är att dela n med två om det är jämnt, eller multiplicera det med tre och addera ett om det är udda. Sedan upprepas detta steg till dess att resultatet blir ett. Collatz problem är att avgöra om man, oavsett vilket tal man börjar med, kan nå talet ett.

Ni ska skapa ett program som skriver ut hur många steg det tar att nå ett när man ger programmet ett startvärde n.

3.5 For-loopar

För att göra något med varje element i en lista kan man använda en for-loop.

```
my_list = [1, 4, 2]
for item in my_list:
    print(item)
```

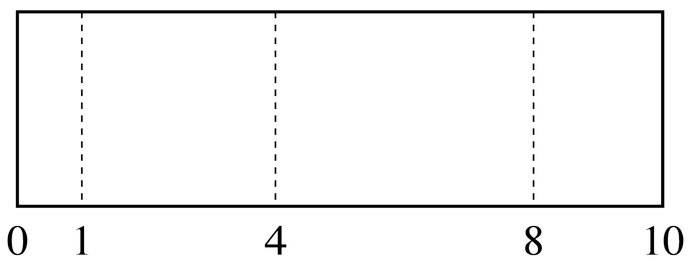
För att göra en lista som upprepar något n gånger kan man skapa en lista med heltalen från 0 till $n-1$ med kommandot `range(n)`.

```
for i in range(10):
    print(i)
```

≫ Läs in 10 heltal (alla är mindre än 1000) och skriv ut hur många *olika* rester vi får om vi dividerar varje tal med 42.

```
finns = [False]*42 #Skapa lista som indikerar vilka tal vi har sett
for i in range(10): #Loopa igenom indata
    print("Skriv in ett tal:")
    n = int(input()) #Läs in ett tal
    ? #Gör något här
print(sum(finns)) #Skriv ut antal unika tal
```

≫ Benjamin och Valentina har flera grupper av elever på sina matteklubbar i Uppsala. Vissa är stora och vissa är små, så de behöver ett rum som snabbt går att anpassa efter olika gruppstorlekar. De har anlitat Fredriks byggfirma för att fixa olika flexibla väggar som man kan montera upp i rummet på specifika platser. Se figur **??** med streckade linjer för ett exempel på ett rum som är 10 meter brett, och har möjliga positioner för väggar vid 1, 4 och 8 meter. Med de positionerna kan man till exempel bilda ett rum som är 3 meter brett (genom att sätta upp väggar vid 1 och 4), eller 7 meter brett (genom att sätta upp väggar vid 1 och 8).



Figur 3.1: Flexibla väggar

Nu vill Benjamin veta alla olika sorters rum man kan bilda från en specifik ritning. Som input till ska ert program ta den totala bredden på rummet och hur många väggar som man kan sätta upp, och därefter vilken position väggarna monteras på. Det är endast heltal. Ditt program ska skriva ut alla olika längder på rum man kan bilda.

4. Introduktion till Python II

Idag ska vi gå igenom funktioner och göra många programmeringsuppgifter!

Uppgift: Räkna ut kvadrater

Skriv en funktion som tar in ett tal och returnerar kvadraten av det.

Input:

4

Förväntad output:

16

Uppgift: Kontrollera en sträng

Skriv en funktion som tar in en sträng och beräknar antalet stora bokstäver och antalet små bokstäver.

Tips:

Funktionen isupper() returnerar True om alla bokstäver är stora och False om de inte är det.

```
>>> "A".isupper()
True
>>> "aA".isupper()
False
```

Input:

"HeLLo wORLd"

Förväntad output:

Antal stora bokstäver: 6
Antal små bokstäver: 4

Uppgift: Städa upp en lista

Skriv en funktion som tar in en lista och returnerar en ny lista med de unika elementen från den första listan.

Input:

[1,2,3,3,3,3,4,5]

Förväntad output:

[1, 2, 3, 4, 5]

Uppgift: Hitta primtal!

Skriv en funktion som tar in ett heltal och ska undersöka om det är ett primtal eller ej.

Input:

13

Förväntad output:

True

4.1 PQ-formeln

Programmera en algoritm som löser en andragradsekvation med pq formeln. I ett första steg kan du låta användaren fylla i p och q och anta att ekvationen står formen $x^2 + px + q = 0$. Du behöver heller inte ta hänsyn till om ekvationen inte har några lösningar eller om den har komplexa lösningar.

PQ formeln

$x^2 + px + q = 0$ har lösningarna

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Möjlig fördjupning

1. Låt din algoritm ta hänsyn till om ekvationen har en eller ingen lösning.
2. Låt din algoritm ta hänsyn till om det finns komplexa rötter.
3. Visa alla steg som användaren behöver se för att förstå lösningen.

Uppgift: FizzBuzz

Skriv en funktion som tar in tre heltal, X, Y och N ($0 <= X < Y <= N <= 100$) och sedan skriver ut alla tal mellan 1 och N, men ersätter alla tal som är delbara med X med Fizz och alla tal som är delbara med Y med Buzz. Om talet är delbart med både X och Y skriver du FizzBuzz istället. Input contains a single test case. Each test case contains three integers on a single line,

Input:

2 3 6

Förväntad output:

1
Fizz
Buzz
Fizz
5
FizzBuzz

Uppgift: Valentinas Discordproblem

Valentina skapade en uppgift till sina elever på Mattekollo med texten: *"Räkna ut värdet av X i följande uttryck:*

$$X = n_1^{p_1} + n_2^{p_2} + \cdots + n_N^{p_N}$$

där n_1, n_2 till n_N är heltal och p_1, p_2 till p_N är ensiffriga heltal."

Tyvärr är inte Valentina så duktig på Discord så när hon klistrade in uppgiften där formaterades texten om och alla upphöjt i försvann ...

Då såg det istället ut såhär:

$X = n1p1 + n2p2 + \cdots + nNpN$

Till exempel kommer en originaluppgift som ser ut såhär $X = 21^2 + 125^3$ att förändras till $X = 212 + 1253$.

Kan du skapa ett program som givet Valentinas nya problemtext ändå räknar ut den ursprungliga summan?

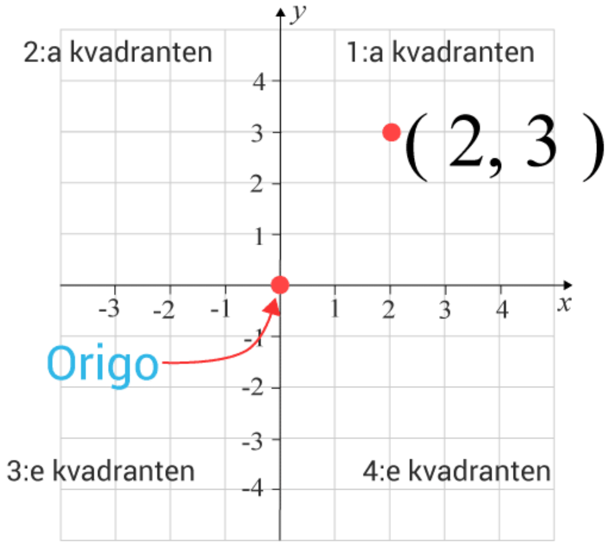
Ditt program ska först läsa in antalet termer N, och sen läsa in alla sammansatta tal np och skriva ut den summa som Valentina förväntade sig.

Koden nedan är ett exempel på hur man kan läsa in indata och skriva ut resultatet på detta problem. Använd alla de fyra första operatorerna i tabellen ovan i er lösning.

```python
print("Skriv in antal termer: ")
N = int(input()) #Läs in antal tal
sum = 0 #Initiera summan till 0
for i in range(N): #Loopa igenom talen i indata
    print("Skriv in ett tal: ")
    tal = int(input()) #Läs in ett tal
    ??? #Räkna upp summan
print(sum) #Skriv ut resultatet
```

Uppgift: Koordinatsystem

Skriv ett program som tar in en x- och y-koordinat och skriver ut i vilken kvadrant den punkten ligger i. Varken x eller y kommer att vara 0.



Koordinatsystem

Uppgift: Tilldelningar med listor

Tilldelningar med listor skapar normalt inte en kopia, utan en referens till samma lista. Oavsett vilken lista man modifierar kommer båda listorna att ändras.

Vad tror du att koden nedan kommer skriva ut? Fundera innan du testar.

```
a = [1, 2]
b = a
b[0] = 4
print(a)
```

Uppgift: While-loopar

Programmet nedan räknar ut summan av talen från 1 till 20.

```
i = 1
summa = 0
while i <= 20:
    summa = summa + i
    i = i + 1
print(summa)
```

Modifiera programmet ovan så att det istället beräknar produkten av heltalen från 5 till 15.

Uppgift: Collatz problem

Collatz problem är ett olöst problem inom talteorin. Problemet utgår från en räknelek som börjar med ett positivt heltal n. Nästa steg är att dela n med två om det är jämnt, eller multiplicera det med tre och addera ett om det är udda. Sedan upprepas detta steg till dess att resultatet blir ett. Collatz problem är att avgöra om man, oavsett vilket tal man börjar med, kan nå talet ett. Ni ska skapa ett program som skriver ut hur många steg det tar att nå ett när man ger programmet ett startvärde n.

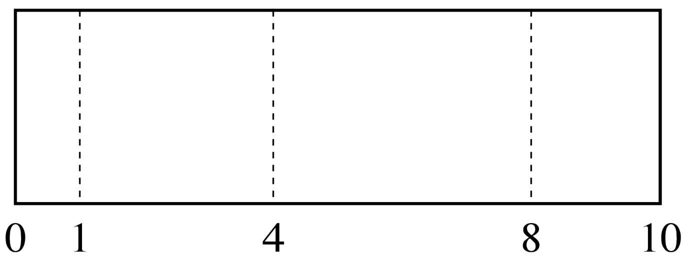
Uppgift: Rester med talet 42

Läs in 10 heltal (alla är mindre än 1000) och skriv ut hur många *olika* rester vi får om vi dividerar varje tal med 42. Använd koden nedan och bygg vidare på!

```
finns = [False]*42 #Skapa lista som indikerar vilka tal vi har sett
for i in range(10): #Loopa igenom indata
    print("Skriv in ett tal:")
    n = int(input()) #Läs in ett tal
    ? #Gör något här
print(sum(finns)) #Skriv ut antal unika tal
```

Uppgift: Flexibla rum

Benjamin och Valentina har många olika grupper av elever på sina matteklubbar i Uppsala och behöver ett rum som snabbt går att anpassa efter olika gruppstorlekar. De har anlitat Fredriks byggfirma för att fixa olika flexibla väggar som man kan montera upp i rummet på specifika platser. Se figur **??** för ett exempel på ett rum som är 10 meter brett, och har möjliga positioner för väggar vid 1, 4 och 8 meter. Med de positionerna kan man till exempel bilda ett rum som är 3 meter brett (genom att sätta upp väggar vid 1 och 4), eller 7 meter brett (genom att sätta upp väggar vid 1 och 8). Nu vill Benjamin veta alla olika sorters rum man kan bil-



Figur 4.1: Flexibla väggar

da från en specifik ritning. Som input till ska ert program ta den totala bredden på rummet och hur många väggar som man kan sätta upp, och därefter vilken position väggarna monteras på. Det är endast heltal. Ditt program ska skriva ut alla olika längder på rum man kan bilda.

5. Introduktion till tävlingsprogrammering

Idag ska vi ha en introduktion till tävlingsprogrammering inför vår tävling imorgon!

★ Uppgift: Echo Echo Echo

I denna uppgift ska du simulera ett eko! Ditt program ska som indata ta in ett enstaka ord och ska sedan skriva ut ordet tre gånger, separerat med mellanslag.

Indata:

Hello

Förväntad utdata:

Hello Hello Hello

★ Uppgift: Lägga ihop två tal

I denna uppgift ska du skriva ett program som tar in två heltal och skriver ut summan av dem. Till din hjälp har du följande kod som visar hur du kan läsa in två tal.

```
line = input()
a, b = line.split()
a = int(a)
b = int(b)
```

Indata:

3 4

Förväntad utdata:

7

★ Uppgift: FizzBuzz

FizzBuzz var från början en lek för barn för att lära sig vilka tal som är delbara med tre och fem, men har på senare tid blivit ett vanligt problem som man får på anställningsintervjuer när man sökt jobb som programmerare på Google eller Microsoft.

Skriv ett program som skriver ut talen 1 till 100. Men för alla tal som är multiplar av tre skriver det ut ”Fizz” istället för talet, och för alla multiplar av fem skriver det ut ”Buzz”. För tal som är en multipel av både fem och tre ska ”Fizz-Buzz” skrivas ut istället.

★ Sjusovare

Begreppet sjusovare har dokumenterats så tidigt som 1649 då domkapitlet i Växjö i en skrivelse kritiserar en man vid namn Lundelius som ”dhen siusoffwaren och tidzspillaren”.

Låt oss säga att den som ligger i sängen fram till klockan sju blir en sjusovare. Många har ovanan att snooza ett par gånger innan de går upp. Givet N personers alarmtid, snoozetid och antal snoozes ska du avgöra vilka av dem som blir sjusovare.

Indata:

Antal personer? 2
Timmar? 6
Minuter? 7
Antal snooze? 6
Minuter per snooze? 9
Timmar? 5
Minuter? 30
Antal snooze? 10
Minuter per snooze? 14

Förväntad utdata:

Blev sjusovare
Blev sjusovare

★ Uppgift: Leta i en lista!

Skriv en funktion som tar in två parametrar: lista med heltal och en heltals nämnare. Funktionen ska sedan returnera en lista med alla värden från listan som är delbara med nämnaren.

Indata:

[4, 10, 7, 8], 4

Förväntad utdata:

[4, 8].

★★ Uppgift: Operationsundersökning

I denna uppgift ska du skriva ett program som ska undersöka addition, subtraktion och multiplikation. Programmet ska undersöka om två givna tal kan bli adderade, subtraherade, multiplicerade eller dividerade så att resultatet blir samma som ett tredje tal. Ditt program ska ta in tre tal och bestämma om det är möjligt eller ej att addera, subtrahera, multiplicera eller dividera de två första talen på något sätt så att resultatet blir samma som det tredje talet (tänk på att subtraktion och division ej är kommutativa). Endast en operation får utföras för att producera det tredje talet.

Indata:

1 2 3
2 24 12
5 3 1
9 16 7
7 2 14
12 4 2

Förväntad utdata:

Possible
Possible
Impossible
Possible
Possible
Impossible

★★ Uppgift: Slut-mitt-start!

Skriv ett program som tar in en sträng och returnerar en ny sträng där det första och sista tecknet har bytt plats.

Indata:

code
a
ab
"" (en tom textsträng)
hello

Förväntad utdata:

eodc
a
ba
""
oellh

★★ Uppgift: list123

Skriv en funktion som tar in en lista och returnerar True om en sekvens av talen 1, 2, 3 finns någonstans i listan.

Indata:

[1, 1, 2, 3, 1]
[3, 1, 2, 4, 1]
[1, 1, 2, 1, 2, 3]

Förväntad utdata:

True
False
True

★★ Uppgift: String-explosion

Skriv ett program som tar in en sträng och returnerar en ny, längre, sträng enligt följande mönster:

Indata:

Code
abc
ab

Förväntad utdata:

CCoCodCode
aababc
aab

★★ Uppgift: Platta till en lista!

Skriv en funktionen som får in en lista som både innehåller listor och vanliga värden. De inre listorna innehåller dock inga listor. Funktionen ska returnera en icke-nästlad lista som innehåller alla värden i de inre listorna, samt värdena som ligger direkt i listan.

Indata:

[[1, 2], [3], [1, 2, 3]]

Förväntad utdata:

[1, 2, 3, 1, 2, 3].

★★★ Uppgift: KEX!

Skriv ett program som skriver ut alla möjliga strängar, av längd 3, som man kan bilda med bokstäverna ’k’, ’e’ och ’x’. Det vill säga alla permutationer av bokstäverna. Det ska bli 27st strängar, varför?

6. Bruteforce

Idag ska vi titta på hur man kan använda sig av bruteforce. En dator är väldigt snabb så den kan testa igenom alla lösningar snabbare än en människa! Det är också helt okej att fortsätta med sina projekt, eller kolla på tidigare lektionsuppgifter som man inte hunnit klart med.

★ Permutationer

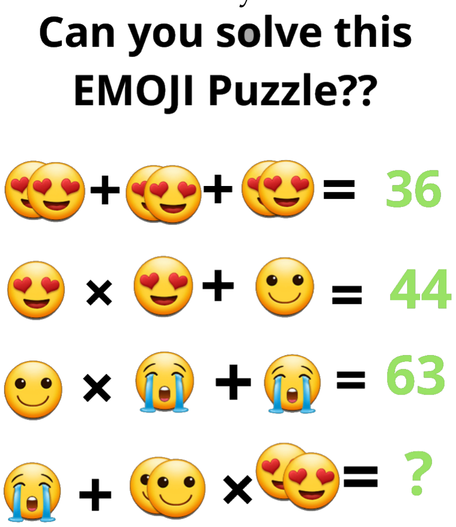
a) Skriv ett program som skriver ut alla möjliga strängar, av längd 3, som man kan bilda med bokstäverna 'k', 'e' och 'x'. Det ska bli 27st strängar, varför?
b) Modifiera programmet i a) så att varje bokstav bara får förekomma en gång. Det ska bli 6st strängar, varför?

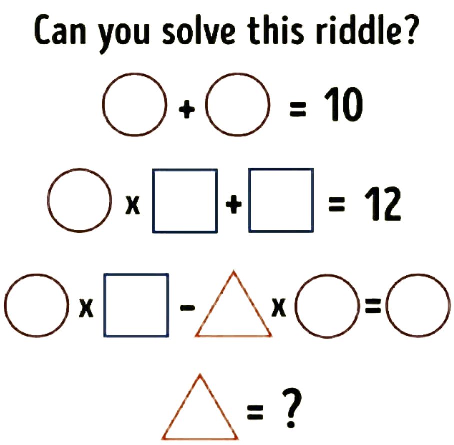
★ Ekvationslösning

Lös ekvationen $(x-4711)^2 = x-4709$ med bruteforce. X är ett positivt heltal. Hur många lösningar finns det?

★ Bildgåtor

Lös båda ekvationssystemen nedan med bruteforce.





★ Dela upp tal som en produkt av två tal

Alla tal kan delas upp som en produkt av två eller flera tal.

Exempel:

$7 = 1 \cdot 7$
$12 = 4 \cdot 3$
$63 = 7 \cdot 9 = 7 \cdot 3 \cdot 3$

Din uppgift är att skriva en funktion som tar in ett tal N, 1 <= N <= 100 och dela upp det i en produkt av **två** tal. Detta ska du göra genom att skapa alla möjliga kombinationer av två tal och sedan undersöka om produkten av de två är lika med det tal vi undersöker. I det här fallet betyder "alla möjliga kombinationer" produkten av alla tal från 1 till 100.

Fortsättning

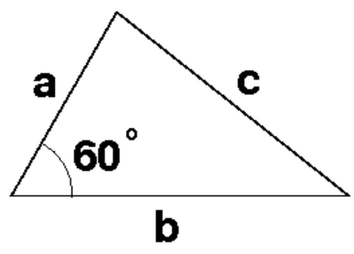
Skriv om funktionen så att den letar efter faktorisering med tre faktorer.

★ Lagomvinklade trianglar

En lagomvinklad triangel är vad vi i denna uppgift kallar en triangel där minst en av vinklarna är exakt 60 grader. De lagomvinklade trianglarna känner sig ofta förbisedda jämfört med de mycket mer kända rätvinkliga trianglarna (så kallat mindervinkelkomplex), trots att de lagomvinklade också har en snygg formel för sina sidlängder:

$c^2 = a^2 + b^2 - ab$

Skriv ett program som skipar lite rättvisa i detta triangeldrama genom att fråga efter ett tal N (mellan 1 och 100) och sedan skriva ut hur många lagomvinklade trianglar det finns vars sidor är heltal i intervallet 1 till N.



Figur 6.1: Ett exempel på en lagomvinklad triangel med sidlängderna $a = 5, b = 8$ och $c = 7$.

Två körningsexempel

```
Talet N ? 25
Antal trianglar: 35

Talet N ? 70
Antal trianglar: 112
```

★ ★ Send more money

Ersätt varje bokstav med en unik siffra mellan 0 och 9 så att uträkningen i figur 5.1 stämmer. Notera att talen inte kan börja med 0, för i så fall skulle man kunna strunta i att skriva ut första bokstaven.

```
  SEND
+ MORE
------
 MONEY
```

Figur 6.2

IV

Lektionsmaterial programmering - Erfarna

1. Lathund för Python till legorobotar

1.1 Portar

Bokstäverna A, B, C, D är utgångar där man skickar ut signaler. Det kan vara signaler som bestämmer hur hjulen ska röra sig eller hur klon ska röra sig. Siffrorna S1, S2, S3, S4 är ingångar, där ansluts sensorer som till exempel ljussensor, ultraljud eller trycksensor. Portarna kommer man åt med:

```
from pybricks.parameters import Port
```

1.2 Klass Motor(port)

Motorerna får roboten att röra sig och styr klon. Importeras med:

```
from pybricks.ev3devices import Motor
```

Funktion run(hastighet)

Kör motorn med en konstant hastighet. Hastigheten anges i grader / sekund.

Funktion run_angle(hastighet, vinkel)

Kör motorn med en konstant hastighet ett visst antal grader.

Funktion run_time(hastighet, tid)

Kör motorn med en konstant hastighet under en viss tid. Tiden anges i millisekunder.

Funktion stop()

Stoppar motorn.

Parameter wait=False

Om man inte vill att roboten ska vänta på att instruktionen kör klart innan den går vidare kan man lägga till den namngivna parametern wait=False till funktionerna run_angle() eller run_time().

1.3 Klass TouchSensor(port)

Trycksensorn ger roboten känsel.

Funktion pressed()

Returnerar True om trycksensorn är intryckt, annars returnerar den False.

1.4 Klass ColorSensor(port)

Ljussensorn ger robotens syn.

Funktion color()

Mäter färgen på ytan som sensorn lyser på. Returnerar Color.BLACK, Color.BLUE, Color.GREEN, Color.YELLOW, Color.RED, Color.WHITE, Color.BROWN eller None om ingen färg detekteras.

Funktion reflection()

Mäter hur många procent av sensorns röda ljus som reflekteras tillbaka in i sensorn. Returvärdet 0 betyder ingen reflektion och 100 betyder hög reflektion.

1.5 Klass UltrasonicSensor(port)

Ultraljudssensorn ger roboten ett övermänskligt sinne för att mäta avstånd.

Funktion distance()

Returnerar avståndet från sensorn till närmaste objekt med hjälp av ultraljudsvågor. Avståndet som returneras är i millimeter.

1.6 Klass GyroSensor(port)

Gyrosensorn ger roboten ett balanssinne.

Funktion angle()

Returnerar vinkeln som gyrot mäter, i grader.

1.7 Övrigt

Funktionen wait(tid)

Pausar programmet en stund. Tiden anges i millisekunder. Finns i pybricks.tools:

```
from pybricks.tools import wait
```

1.8 Knappar

Funktion buttons.pressed()

Returnerar en lista med de knappar på EV3-klossen som är intryckta just nu.

1.9 Högtalaren

Funktion speaker.beep(frekvens, tid)

Spelar upp en ton en viss tid. Tiden anges i millisekunder. Minsta möjliga frekvens är 100 Hz.

Funktion speaker.play_notes(noter, tempo)

Spelar upp en sekvens av noter. Till exempel kan du skicka in listan: ['C4/4', 'C4/4', 'G4/4', 'G4/4']. Tempo anges i BPM (slag per minut) där en fjärdedels not är ett slag.

Varje not består av en sträng enligt följande:

- Första tecknet är namnet på noten, A till G eller R för en paus.
- Till vissa noter kan man lägga till ett korsförtecken # eller b-förtecken.
- Notens namn följs av oktavnumret, mellan 2 och 8. Till exempel är C4 ettstrukna C. Oktavnumreringen ökar vid tonen C, så till exempel heter tonen precis innan C4 B3.
- Oktavnumret följs av ett snedstreck (/) och ett heltal som indikerar tonlängden. Till exempel betyder /4 att det är en fjärdedelsnot, /8 att det är en åttondelsnot och så vidare.
- Det går även att lägga till en punkt (.) efter noten för att indikera att det är en punkterad not. Det gör att noten blir 50% längre.
- Allra sist kan man lägga ett understreck (_) för att indikera en bindebåge mellan två noter, då kommer det inte vara någon paus mellan denna och nästa not.

Funktion speaker.say(text)

Låter roboten säga en valfri text. Normalt sett försöker den uttala orden på engelska, men med set_speech_options(sv") kommer den försöka uttala det på svenska.

1.10 Skärmen

Funktion screen.clear()

Tömmer skärmen.

Funktion screen.draw_text(x,y,text)

Skriver ut en text på skärmen på koordinat x, y. Origo är i övre vänstra hörnet.

Funktion screen.draw_image(x,y,bild)

Ritar en bild på skärmen. Bilden måste vara en svart-vit png. Det finns ett gäng färdiga bilder man kan använda, bland annat:

- ImageFile.ACCEPT
- ImageFile.WARNING
- ImageFile.ANGRY
- ImageFile.WINKING
- ImageFile.NEUTRAL

Funktion screen.draw_pixel(x, y)

Ritar en pixel på skärmen på angiven koordinat.

Funktion screen.draw_line(x1, y1, x2, y2)

Ritar en linje på skärmen som börjar i punkten x1,y1 och slutar i punkten x2,y2.

Funktion screen.draw_box(x1, y1, x2, y2)

Ritar en rektangel på skärmen med vänstra sidan på x1-koordinaten, övre sidan på y1 koordinaten, högra sidan på x2 koordinaten och nedre sidan på y2 koordinaten. Man kan skicka med den namngivna parametern fill=True om man vill skapa en ifylld rektangel.

Funktion screen.draw_circle(x, y, r)

Ritar en cirkel på skärmen med mittpunkt i x,y och radie r. Man kan skicka med den namngivna parametern fill=True om man vill skapa en ifylld rektangel.

Parametern fill=True

Man kan skicka med den namngivna parametern fill=True till funktionerna draw_circle() och draw_box() om man vill skapa en ifylld cirkel respektive rektangel.

2. Legorobotar forts.

Idag fortsätter vi med legorobotarna och ska bland annat kika på hur man skapar egna funktioner, och hur man skriver ut saker på robotens skärm.

Uppgift: Egen funktion för att köra rakt fram

Skapa en egen funktion som tar in cm som roboten ska åka istället för varv eller grader på hjulen. Använd variabler för hjulens storlek.

Vad som kan varieras

Bygg vidare på funktionen för att köra rakt och lägg in ett gyro så att den alltid kör rakt oavsett om det är ojämnt underlag.

Var används detta på riktigt?

Bra med funktioner som man kan återanvända fler gånger. Dessutom bra att kunna ange i enheter som är enklare att relatera till. Skapar mindre fel då.

Uppgift: Egen funktion för att svänga

Skapa ytterligare en funktion som tar in antal grader roboten ska svänga. Testa att gör den **utan** gyro-sensorn, utan med matematik som räknar ut hur långt motorerna ska svänga för att uppnå en viss vinkel.

Vad som kan varieras

Bygg vidare på funktionen ovanför och ange en svängradie på svängen, istället för att alltid svänga kring robotens centrum. Då kan man ange hur stor cirkel robotens centrum ska förflytta sig längsmed.

Uppgift: Övergångsställe

Räkna linjerna i en variabel, och stanna efter att roboten passerat 4 linjer. Skulle man vilja ändra nått ljusvärde behöver man bara göra det på ett enda ställe.

Vad som kan varieras

Kör fram till en vägg och räkna antalet linjer som roboten har passerat fram tills dess. Skriv ut antal passerade linjer på skärmen.

Var används detta på riktigt?

Linjerna på rad kan ses som ett övergångsställe som roboten måste upptäcka.

Variabler är bra för att kunna komma ihåg saker som har skett tidigare.

Uppgift: Håll avståndet!

Försök att hålla ett visst avstånd till ett föremål framför den, t.ex. din hand eller en kartongskiva. Roboten ska backa om kartongen kommer för nära, och köra framåt om kartongen flyttas bort från roboten.

Vad som kan varieras

Olika avstånd. På hur långt avstånd kan den maximalt följa med? Vad händer om du rör föremålet för snabbt? Vad händer om den tappar bort föremålet? Lägg till någon form av sökbeteende? Kan ni sätta flera robotar i rad som följer varandra?

Går att skapa en P-regulator, vilket betyder att den åker fortare om kartongen är långt ifrån gränsen, och långsammare om den är nära avståndsgränsen.

Var används detta på riktigt?

Volvo utvecklar just nu fordonståg där lastbilar kör utan förare. Det finns en förare i första lastbilen som styr, sedan lägger sig flera andra på ett fast avstånd till bilen framför. Detta för att det blir billigare att slippa betala lön till förarna i lastbilarna längre bak, dessutom spar de bränsle eftersom de kan ligga väldigt tätt och få bort luftmotstånd.

Uppgift: Gyro-regulator

Gyroregulator, får roboten att åka rakt med hjälp av data från gyro-sensorn. Det här är vad som brukar kallas P-regulator.

Vad som kan varieras

Försök få roboten att klara så stora störningar som möjligt. Lägg ut papper framför roboten som gör att hjulen spinner/slirar. Eller lägg ut andra små störningsmoment, kanske tändstickor om vi har några. Knuffa på roboten.

Lägg till ett ljud som säger Äj"eller "uschöm nån puttar på roboten för mycket.

Utveckla P-regulatorn mer och lägg till en integrerande och deriverande del så att det blir en PID-regulator.

Var används detta på riktigt?

Att köra rakt trots störningar är viktigt. Världen är sällan helt ideal och ska man göra en robust robot måste den använda sig av sensorer för att ta sig fram. Om man bygger en skogsrobot som ska ta sig fram över stockar och stenar används ofta gyrosensorer.

Uppgift: Grafritare

Låt roboten mäta avståndet framför roboten eller vinkeln på roboten och rita ut sensorvärdet som en graf på skärmen. Du kan både låta roboten rotera själv, eller lyfta upp roboten och rotera med handen.

Vad som kan varieras

Istället för att mäta avstånd kan man plotta något annat. T.ex. färgen på underlaget så får du en "karta"över vilka nyanser golvet har längsmed en sträcka. Förslagsvis låter man roboten köra framåt istället för att rotera på stället.

Var används detta på riktigt?

Ofta så får man en bättre förståelse av sensordata i en graf istället för att bara läsa av en siffra på en skärm. Det är ofta viktigt att se hur något varierar över tid och i en graf kan du se historisk data enkelt.

Uppgift: Kartering

Låt roboten rotera ett varv och mät avståndet fram till närmsta objekt vid varje grad. Rita ut en graf i fönstret på roboten där X koordinaten representerar vinkel och Y-koordinaten motsvarar dess avstånd. Då får man en form av karta över omgivningen.

Vad som kan varieras

Istället för att bara rotera ett varv kan man låta roboten köra framåt eller bakåt och sen rotera igen för att bygga en större karta. Detta kallas för SLAM.

Var används detta på riktigt?

Räddningsrobotar skickar man in i okända områden och då måste de skapa sig en karta när de åker runt. De använder ultraljud och lasersensorer (LIDAR) för att mappa upp området som de är aktiva i.

3. Mer avancerade koncept i Python

Idag kommer vi gå igenom objektorientering från grunden och lite mer avancerade koncept i Python.

Uppgift: Skapa en punkt

Skapa en klass som innehåller en x och y koordinat. Överskugga `__abs__`-metoden så att den räknar ut punktens avstånd till origo.

Överskugga kallas override på engelska. Vad är skillnaden mellan overriding (överskuggning) och overloading (överlagring)? Finns båda i Python?

Uppgift: Geometriska former

Skapa en klass som heter GeometriskForm vars init-metod tar geometriska formens namn. Den ska även innehålla en metod för arean. Överlagra även `__str__` metoden som skriver ut formens namn.

Sen ska du skapa två barn-klasser, en Kvadrat och en Cirkel. Låt kvadraten ta in sidlängden som parameter till sin init-metod, och cirkeln ta in radien. Glöm inte anropa sin förälders init-metod med `super()`! Överskugga även area-funktionen så att den räknas ut rätt.

```
a = Square(4)
b = Circle(7)
print(b)
print(b.area())
print(a)
print(a.area())
```

Som ni ser så anropas `__str__` funktionen från basklassen.

Uppgift: Zoologiska trädgården

Skapa en ursprungsklass Djur. Lägg även till metoder som `äta()`, `sova()` till djuret.

Sen skapar du klasser för däggdjur och för fåglar. Lägg till vettiga metoder som `lägg_ägg()` eller `flyga()` till fågeln och `gå()` och `dia()` till däggdjuret.

Och sist skapar du djur som ärver från respektive klass. Typ Elefant från däggdjur och Skata från fåglar. Lägg till fler metoder som `vifta_med_snabeln()` och `kraxa()` till djuren.

Skapa en statisk metod som skriver ut fakta om djuret. Den kan vara statisk eftersom den inte opererar på en specifik individ (ett objekt) utan istället på djuret (en klass).

Lägg prints i varje metod så vi kan se vad som anropas. Testa skapa dina objekt och anropa metoderna! Lägg gärna prints i init-metoden också för att se vilken ordning de körs!

Hur skulle du implementera ett näbbdjur som är ett däggdjur, men som lägger ägg? Hur skulle du hantera en struts som är en fågel som inte kan flyga?

Kan inte låta bli att smyga in en gåta: Finns det fåglar som inte lägger ägg? *

Överkurs: Förhindra att man instansierar ett objekt av Djur, Däggdjur eller Fågel-klassen direkt. De får bara skapas av sina barn. Använd `__new__()`.

Uppgift: Komplexa tal

Skapa en klass som representerar komplexa tal. Överskugga metoderna för addition, subtraktion, multiplikation, division, längd och absolutbelopp så att de fungerar som man förväntar sig:

$$z_1 = a + bi$$
$$z_2 = c + di$$
$$z_1 + z_2 = (a+c) + (b+d)i$$
$$z_1 - z_2 = (a-c) + (b-d)i$$
$$z_1 \cdot z_2 = (ac-bd) + (ad+bc)i$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(ac+bd) + (bc-ad)i}{c^2+d^2}$$
$$|z_1| = \sqrt{a^2+b^2}$$

Överkurs: Lägg till metoder för att rita ut talen i ett arcade-fönster, och undersök vad som händer vid multiplikation och division mellan komplexa tal.

Uppgift: Konvertera viktenheter

Skapa en funktion som konverterar vikter till kg. Den ska till exempel kunna anropas såhär:

```
>>> till_kg(hekto=10)
>>> till_kg(gram=25)
>>> till_kg(ton=3)
>>> till_kg(uns=12.5)
>>> till_kg(pund=10.1)
```

Vill du så lägg till några ryska enheter som dolja, zolotnik och berkovets.

Uppgift: Jämna tal

Skriv en subklass till `int` som alltid ska vara ett jämnt nummer, avrunda input till närmaste jämna nummer.

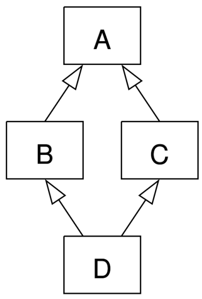
Uppgift: Begränsa antalet skapade objekt

Låt oss säga att vi vill skapa en rektangel med fyra hörn. Skapa en ny klass som representerar hörnen i fyrkanten, som ärver från klassen du skapade i Uppgift 3. Begränsa även konstruktorn så att man bara kan skapa 4 element av klassen.

```
>>> p1 = SqPoint(0,0)
>>> p2 = SqPoint(1,0)
>>> p3 = SqPoint(1,1)
>>> p4 = SqPoint(0,1)
>>>
>>> p5 = SqPoint(2,2)
Traceback (most recent call last):
...
ValueError: Cannot create more objects
```

Uppgift: Den dödliga diamanten

"Diamantproblemet" är en tvetydighet som uppstår när två klasser B och C ärver från A, och klass D ärver från både B och C. Om det finns en metod i A som B och C har överskuggat, men som D inte har överskuggat. Vilken version av metoden ärver D: den från B, eller den från C?



Överkurs: Rita upp släktträdet för följande arv:

```
>>> O = object
>>> class F(O): pass
>>> class E(O): pass
>>> class D(O): pass
>>> class C(D,F): pass
>>> class B(D,E): pass
>>> class A(B,C): pass
```

Skriv in i vilken ordning de ärvs. Orkar man inte lägga in massa print-satser kan man anropa funktionen mro() på till exempel klass A så syns det i vilken ordning dess föräldrar ärvs. Man kan se att den går i logisk ordning från barn till föräldrar, vidare till mor- och farföräldrar och uppåt.

Testa nu att byt plats på D och E i arvsordningen för B. Vad händer nu? Varför ärvs det inte längre i kronologisk ordning från barn och uppåt?

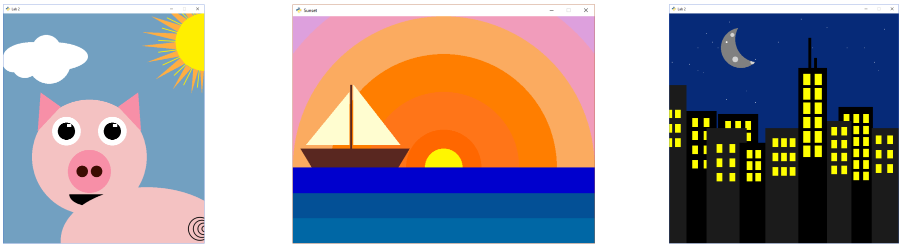
* Svaret på gåtan: Ja, hanfåglar såklart!

4. Introduktion till spelprogrammering

Idag kommer vi gå igenom lite spelprogrammering med Arcade!

Uppgift: Rita en bild

Rita en valfri bild med hjälp av Arcade-biblioteket i python.



Figur 4.1: Exempel på vad man kan rita

Importera arcade i python-filen genom att skriva

```
import arcade
```

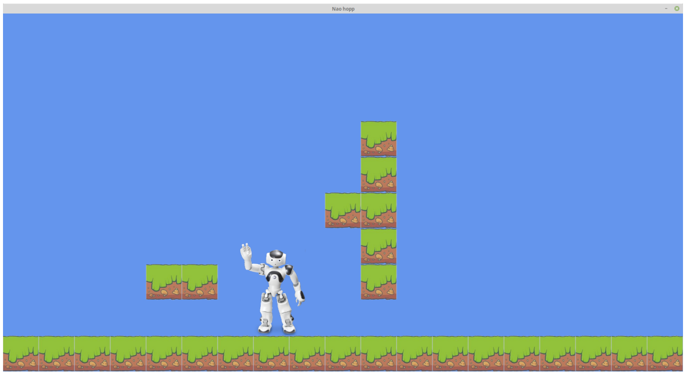
och öppna ett fönster från arcade-biblioteket och skriv en titel. Välj Fönstrets dimensioner (bredd och höjd) och börja rita. Du kan bland annat använda dig av arcade-funktionerna nedanför.

```
arcade.open_window(800, 600, "Titel") # öppnar ett fönster med bredd 800, höjd 600 och titel "Titel"
arcade.set_background_color(arcade.color.AFRICAN_VIOLET) # skapar en bakgrundsfärg
arcade.start_render() # gör sig redo för att börja rita

# rektangel som defineras utifrån x- och y-positionerna till rektangelns kanter. Först x-positionen till vänstra kanten (0), därefter x-positionen till högra kanten (800), sedan y-positionen till den övre kanten (200) och till sist y-positionen till den nedre kanten(0):
arcade.draw_lrtb_rectangle_filled(0, 800, 200, 0, arcade.color.BITTER_LIME)
# rektangel som defineras utifrån rektangelns centrum (x- och y-positionen (70,260)), följt av bredden (30) och höjden (40) till rektangeln:
arcade.draw_rectangle_filled(70, 260, 30, 40, arcade.color.BONE)
# triangel med hörnpositionerna (100, 470), (280, 470) och (190, 500):
arcade.draw_triangle_filled(100, 470, 280, 470, 190, 500, arcade.color.BROWN)
# polygon med hörnpositionerna (20,350),(100, 470),(280, 470) och (360, 340):
arcade.draw_polygon_filled([[20, 350],
                            [100, 470],
                            [280, 470],
```

```
                        [360, 340]],
                        arcade.color.BROWN)
# cirkel med centrum i (400,100) och radie 50:
arcade.draw_circle_filled(400, 100, 50, arcade.color.BLACK_OLIVE)


arcade.finish_render() # avslutar möjligheten att rita
arcade.run() # Låter fönstret vara öppet tills någon stänger det
```

Fönstrets origo (0,0) ligger i det nedre vänstra hörnet.
Du kan byta ut draw_circle_filled mot draw_circle_outline om du enbart vill ha kanterna till föremålet, istället för att den ska vara ifylld. För att se vad färgerna heter kan du gå in på länken `https://api.arcade.academy/en/latest/arcade.color.html`. Du kan hitta fler geometriska former och rit-hjälpmedel på `https://api.arcade.academy/en/latest/examples/drawing_primitives.html`.

Uppgift: Förbättra spelet



Figur 4.2: Naospelet

Några förslag:

- Spegla spelaren när den går åt höger eller vänster
- Kunna ducka under vissa block
- Lägg till nått som ger poäng
- Skapa fiender
- Lägg till ljudeffekter

Uppgift: Gör ett eget spel

Skapa ett eget valfritt spel. `https://kenney.nl` innehåller en hel del gratis paket med grafik och ljud för spel. Annars är google din vän.

5. Introduktion till tävlingsprogrammering

Idag ska vi gå igenom problemlösning med programmering, framförallt ska vi titta på hur man kan använda sig av bruteforce. En dator är väldigt snabb så den kan testa igenom alla lösningar snabbare än en människa! Imorgon är det programmeringstävling! Då kan dessa kunskaper komma till nytta!

★ Permutationer

a) Skriv ett program som skriver ut alla möjliga strängar, av längd 3, som man kan bilda med bokstäverna 'k', 'e' och 'x'. Det ska bli 27st strängar, varför?
b) Modifiera programmet i a) så att varje bokstav bara får förekomma en gång. Det ska bli 6st strängar, varför?
c) Skriv ut alla permutationer av strängen "MADDE".

★ Send more money

Ersätt varje bokstav med en unik siffra mellan 0 och 9 så att uträkningen i figur 5.1 stämmer. Notera att talen inte kan börja med 0, för i så fall skulle man kunna strunta i att skriva ut första bokstaven.

$$\begin{array}{r} \mathtt{SEND} \\ +\ \mathtt{MORE} \\ \hline \mathtt{MONEY} \end{array}$$

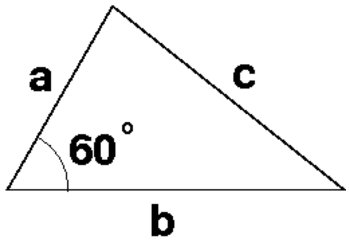
Figur 5.1

★ Lagomvinklade trianglar

En lagomvinklad triangel är vad vi i denna uppgift kallar en triangel där minst en av vinklarna är exakt 60 grader. De lagomvinklade trianglarna känner sig ofta förbisedda jämfört med de mycket mer kända rätvinkliga trianglarna (så kallat mindervinkelkomplex), trots att de lagomvinklade också har en snygg formel för sina sidlängder:

$c^2 = a^2 + b^2 - ab$

Skriv ett program som skipar lite rättvisa i detta triangeldrama genom att fråga efter ett tal N (mellan 1 och 100) och sedan skriva ut hur många lagomvinklade trianglar det finns vars sidor är heltal i intervallet 1 till N.



Figur 5.2: Ett exempel på en lagomvinklad triangel med sidlängderna $a = 5, b = 8$ och $c = 7$.

Två körningsexempel

```
Talet N ? 25
Antal trianglar: 35

Talet N ? 70
Antal trianglar: 112
```

★★ Klockan

Figur 5.3

Om någon frågar hur mycket klockan är, svarar de flesta ”kvart över fem”, 15:29 eller något liknande. Vill man göra det lite svårare så kan man annars svara med vinkeln mellan tim- och minutvisaren, eftersom man ur denna information entydigt kan bestämma klockslaget. Dock är det många människor som är ovana vid detta sätt att ange tider, så det vore bra att ha ett datorprogram som översätter till ett mer normalt format. Du ska skriva ett sådant program.

Vi förutsätter att vår klocka saknar sekundvisare och endast visar ett helt antal minuter (det vill säga: båda visarna hoppar framåt bara på hel minut). Vinkeln avläses genom att utgå från timvisaren och sedan mäta hur många grader medurs minutvisaren ligger (se figur 5.3). För att undvika decimaler anges vinkeln i tiondels grader (så att 85.5 grader skrivs som 855). Detta tal är alltid ett heltal mellan

0 och 3595 (inklusive) och är, som en följd av att endast hela minuter visas, alltid delbart med 5.

Programmet ska fråga efter en vinkel och sedan skriva ut tiden i vanligt digitalformat, alltså h:mm eller hh:mm, beroende på antalet timmar. Vi förutsätter att det är morgon, så alla tider ska ligga mellan 0:00 och 11:59 (inklusive).

Två körningsexempel

```
Vinkel ? 855
Klockan är 1:21

Vinkel ? 3140
Klockan är 3:08
```

★★ Busig dotter

Madde är uppvuxen på en bondgård och hennes pappa hade fem höbalar utanför ladugården. I juni bad han Madde att väga upp balarna åt honom, men istället för att väga dem en och en, valde hon att väga dem i parvisa kombinationer: bal 1 och 2, bal 1 och 3, bal 1 och 4, bal 1 och 5, bal 2 och 3, bal 2 och 4, osv.

Vikterna för dessa parvisa vägningar skrev hon upp på 10 papperslappar. Men Madde är rätt glömsk så hon glömde bort vilken lapp som hörde till vilket par. Istället tänkte hon ”Äsch, det spelar ju ingen roll, jag lägger dem i storleksordning.”

Nu står hennes pappa här och har ingen aning om vilken höbal som väger vad. Det enda han har är papperslapparna. Kan du hjälpa honom att reda ut det här? Hur mycket väger varje höbal? Finns det fler en än lösning?

Körningsexempel

```
Papperslappar ? 80, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 90, 91
Höbalarna väger: 39 41 43 44 47
```

★★★ Tvetydiga datum

Datum skrivs på olika sätt i olika länder. Till exempel skulle datumet 03/05/01 i Sverige betyda 1 maj 2003, medan det i USA skulle vara 5 mars 2001 och i en del andra länder 3 maj 2001 (vi kan utgå ifrån att årtalet alltid är under 2000-talet, dvs mellan 2000 och 2099).

Detta kan bland annat orsaka bekymmer när man tittar på bäst-före datumet på en gammal konservburk. Om man inte har en aning om vilket format ett datum har, kan man behöva pröva alla möjliga betydelser och, för att vara på den säkra sidan, välja det tidigaste giltiga datumet.

För att ett datum ska vara giltigt måste förstås månaden vara mellan 1 och 12 och dagen mellan 1 och antalet dagar i månaden. Antalet dagar i de tolv månaderna är i tur och ordning

31, 28, 31, 30, 31, 30, 31, 31, 30, 31, 30, 31

utom under skottår (vilka, för perioden 2000 - 2099, infaller om årtalet är jämnt delbart med 4) då februari har 29 dagar.

Skriv ett program som läser in de tre delarna av ett datum och skriver ut det tidigaste giltiga datumet som indata kan tänkas representera.

Körningsexempel

```
Del 1: 3
Del 2: 5
Del 3: 1
År 2001, månad 3, dag 5.
```

★★★ Uppställning

Figur 5.4: Raden med barn i exemplet sedda bakifrån.

Den röda mattegruppen med 8 barn (Anders, Ivan, Karin, Linus, Mira, Sebastian, Vidar & Ludvig) beslutar sig för att testa Leonids tankeförmåga. Utan att han ser dem ställer de upp sig på en rad. Sen räknar vart och en av dem hur många av de barn som står till vänster om honom/henne som är längre än han/hon själv, och sedan likadant med dem som står till höger. Var och en skriver ner dessa antal på en lapp som de ger till Leonid efter att ha frångått uppställningen. Deras enkla uppmaning till honom är att tala om i vilken ordning de stod.

Ett exempel med fem barn visas i figur 5.4 ovan. A har ett längre barn (D) till vänster om sig och två (C och E) till höger. B har tre längre barn till vänster om sig och ett till höger. C har ett längre barn till vänster om sig men inget till höger och så vidare. Informationen på lapparna kan sammanfattas så här:

Barn	Vänster	Höger
A	1	2
B	3	1
C	1	0
D	0	0
E	2	0

Tyvärr klarade Leonid inte nöten utan måste i hemlighet smyga iväg och skriva ett datorprogram som löser uppgiften. Han kan förutsätta att alla barn är olika långa och att de inte har gjort något misstag när de skrev lapparna. Intressant nog finns det aldrig mer än en lösning.

Körningsexempel

```
Anders, vänster ? 2
Anders, höger ? 0
Ivan, vänster ? 0
Ivan, höger ? 1
Karin, vänster ? 0
Karin, höger ? 6
Linus, vänster ? 2
Linus, höger ? 3
Mira, vänster ? 0
Mira, höger ? 0
Sebastian, vänster ? 3
Sebastian, höger ? 1
Vidar, vänster ? 2
Vidar, höger ? 1
Ludvig, vänster ? 6
Ludvig, höger ? 1

Uppställningen: Karin Ivan Mira Linus Vidar Sebastian Ludvig Anders
```

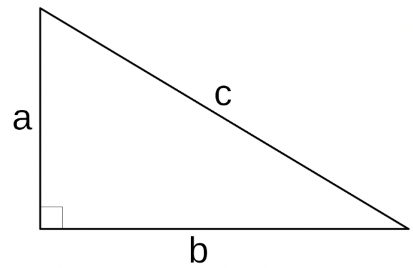
6. Matte med Python

Idag ska vi titta på hur man kan ta hjälp av python för att räkna matematik. Det är också helt okej att fortsätta med sina projekt, eller kolla på tidigare lektionsuppgifter som man inte hunnit klart med.

6.1 Pythagoras sats

Pythagoras sats säger att hypotenusan i kvadrat är lika med summan av sidorna i kvadrat i en rätvinklig triangel, $a^2 + b^2 = c^2$.

Men påståendet går även att vända på; om Pythagoras sats inte stämmer så är triangeln inte rätvinklig. Skriv en funktion triangelRatvinklig(a, b, c) som returnerar True om triangeln är rätvinklig, det vill säga om Pythagoras sats stämmer, annars False.



6.2 Talföljder

Fibonaccis talföljd

Det finns många spännande talföljder. En av de mest kände är Fibonacci-talen. Där räknas varje tal ut som summan av de två föregående talen: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...
Skriv en funktion som skriver ut alla Fibonacci-tal upp till 100.

Skriv en egen talföljd

Hitta på en egen talföljd och skriv en funktion för att ta fram alla tal i den. Skriv också en funktion som tar reda på om ett tal ingår i denna talföljd.

6.3 Talet π

Talet π är en konstant som bland annat anger förhållandet mellan en cirkels omkrets och diameter. π kan beräknas på många olika sätt. Eftersom π är irrationellt går talet inte att skriva ut exakt med siffror, men ett approximativt värde är $\pi \approx 3,141592653589793$.

Nu ska vi undersöka några olika formler för att räkna ut π.

Gottfried Leibniz formel

$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \ldots$

John Wallis formel

$\frac{\pi}{2} = (\frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 3}) \cdot (\frac{4 \cdot 4}{3 \cdot 5}) \cdot (\frac{6 \cdot 6}{5 \cdot 7}) \cdot (\frac{8 \cdot 8}{7 \cdot 9}) \cdot \ldots$

Lösningen av Baselproblemet

$\frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots$

Skriv ett program som ska räkna ut pi med ett visst antal decimaler rätt med hjälp av de olika formlerna. Vilken formel tycker du är bäst?

6.4 Numpy-uppgifter

1. Skapa en nollvektor med 10 element. Ledtråd: `np.zeros`
2. Skapa en vektor med tal från 10 till 49. Ledtråd: `arange`
3. Vänd på en vektor (första elementet blir sista). Ledtråd: `array[::-1]`
4. Skapa en 3x3 matris med tal från 0 till 8. Ledtråd: `reshape`
5. Hitta index på alla element som är nollskilda. Ledtråd: `np.nonzero`
6. Skapa en identitetsmatris. Ledtråd: `np.eye`
7. Skapa en 3x3x3 array med slumptal. Ledtråd: `np.random.random`
8. Skapa en 10x10 array med slumptal och hitta största och minsta värdet. Ledtråd: `min, max`
9. Skapa en vektor med 30 element och hitta medelvärdet. Ledtråd: `mean`
10. Skapa en 2D array med nollor, men ettor runt hela kanten. Ledtråd: `array[1:-1, 1:-1]`
11. Hur kan man lägga till en ram (fylld med nollor) runt en existerande array? Ledtråd: `np.pad`
12. Vad blir utskriften av följande rader?

```
0 * np.nan
np.nan == np.nan
np.inf > np.nan
np.nan - np.nan
np.nan in set([np.nan])
0.3 == 3 * 0.1
```

Ledtråd: NaN = not a number, inf = infinity

13. Skapa en 5x5 matris med talen 1,2,3,4 just under diagonalen. Ledtråd: `np.diag`
14. Skapa en 8x8 matris och fyll den med ett schackmönster. Ledtråd: `array[::2]`
15. Hur kan du få tag i (x,y,z) indexet för det hundrade elementet i en array som har formen (6,7,8)? Ledtråd: `np.unravel_index`
16. Skapa ett schackbräde med tile-funktionen. Ledtråd: `np.tile`
17. Givet en en-dimensionell array med slumptal mellan 1 och 20, negera alla tal som är mellan 3 och 8. Ledtråd: >, <
18. Givet en heltalsvektor Z, vilka av följande uttryck går att köra? Och vad gör de? Fundera innan du kör dem!

```
Z**Z
2 << Z >> 2
Z <- Z
1j*Z
Z/1/1
Z<Z>Z
```

19. Hur kan du hitta gemensamma värden mellan två arrays? Ledtråd: `np.intersect1d`
20. Skapa en 5x5 matris där varje rad har värdena 0,1,2,3,4. Ledtråd: `np.arange`
21. Skapa en vektor med 10 element jämnt spridda mellan 0 och 1 (exkluderande 0 och 1 själva). Ledtråd: `np.linspace`
22. Skapa en vektor med 10 element och sortera den. Ledtråd: `sort`
23. Hur kan man summera en kort array snabbare än np.sum?? Ledtråd: `np.add.reduce`
24. Skapa en vektor med 10 slumptal och ersätt största värdet med 0. Ledtråd: `argmax`
25. Skapa en 16x16 array och skapa en ny array med de fyra block-summorna (blockstorleken är alltså 4x4). Ledtråd: `np.add.reduceat`

Häftet innehåller material från Mattekollo 2021 för åk 6-9, alla matematiklektioner samt materialet för båda programmeringsgrupperna.

Tack till alla deltagare och ledare!