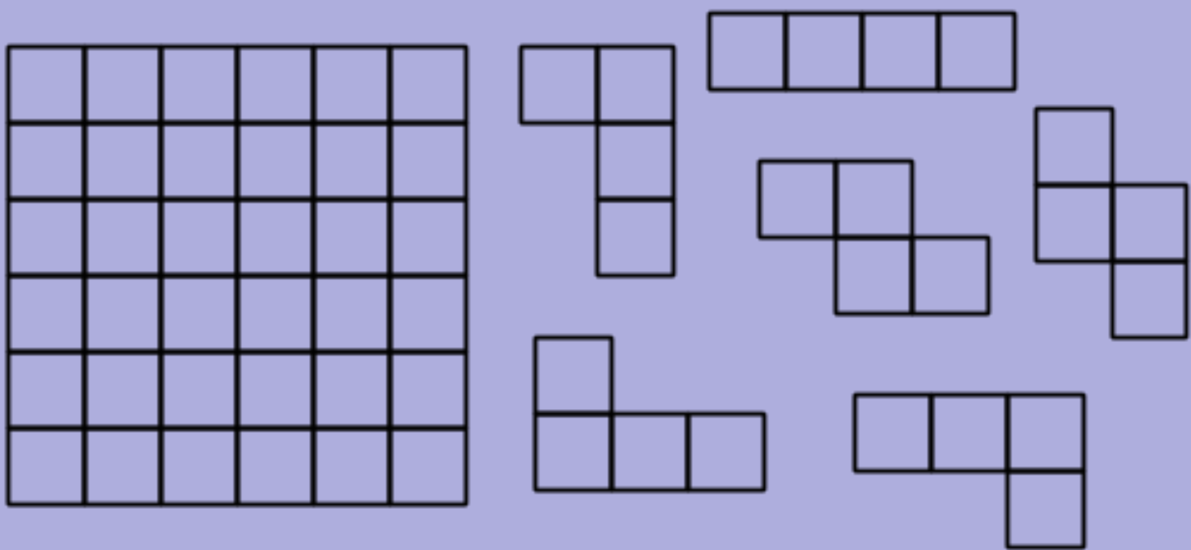
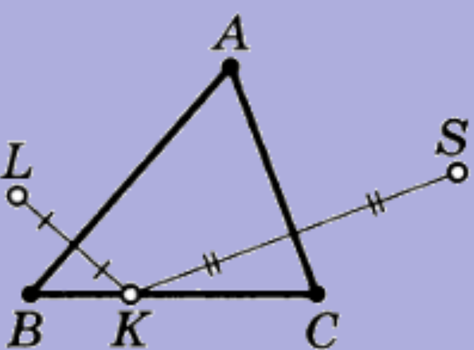
2021

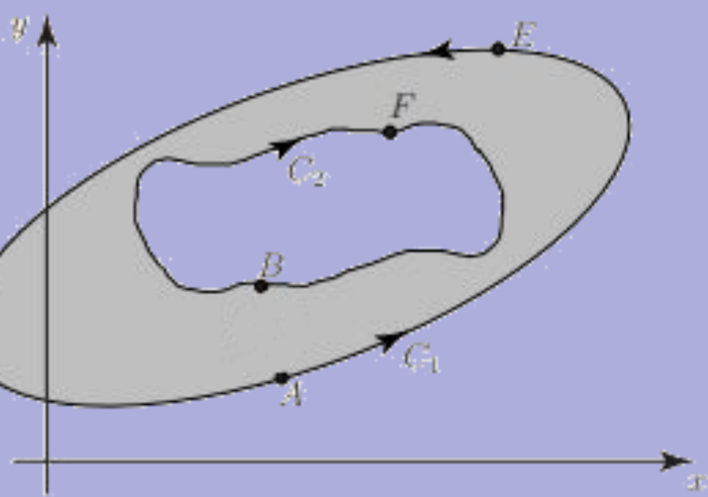
MATTEKOLLO

Lektionsmaterial

åk 9-gy2







Lektionsmaterial Mattekollo 2021

åk 9-2gy

V. Chapovalova, V. Jansson, F. Löfgren, , M. Nilsson, B. Verbeek , A. Villaro Krüger

Norrtälje, Augusti 2021

Innehåll

III Appendix

Lektionsmaterial matematik

1. Dynamisk Geometri

1.1 Geometri med geogebra I

1. **(a)** Konstruera en triangel vars hörn ligger på en fixerad cirkel.

(b) Rita en cirkel som går igenom de tre hörnen på en fixerad triangel.

2. Skriv in en vinkel i en fixerad cirkel så att vinkeln står på en fixerad båge (det betyder att skärningspunkterna mellan vinkeln och cirkeln är fixerade, medan vinkelns hörnpunkt ”springer runt” fritt på cirkeln).

3. En spetsig vinkel är fixerad. Konstruera en kvadrat som har två av sina hörn intill varandra på vinkelns ena sida, tredje hörnet är på vinkelns andra sida och det fjärde hörnet ligger inuti vinkeln. Hur många sådana kvadrater är möjliga att konstruera?

4. En vinkel som är mindre än 45° är fixerad. Konstruera en kvadrat som har två av sina hörn intill varandra på vinkelns ena sida, tredje hörnet är på vinkelns andra sida och det fjärde hörnet ligger *utanför* vinkeln. Hur många sådana kvadrater är möjliga att konstruera?

5. Ett parallellogram är en fyrhörning där båda paren av motstående sidor är parallella. Skriv in ett parallellogram i en given fixerad triangel, så att alla parallellogrammets hörn samt två av parallellogrammets sidor ligger på triangelns sidor. Hur många sådana här parallellogram går att konstruera?

6. En korda är en sträcka där båda ändpunkterna ligger på en viss cirkel. Låt en cirkel vara fixerad. Konstruera två kordor som är vinkelräta mot varandra och båda går igenom en fixerad punkt inuti cirkeln.

7. Skriv in en rektangel i en spetsvinklig fixerad triangel ABC på så sätt att ena sidan på rektangeln ligger på sidan AB och de övriga två hörnen ligger på sträckorna AC och BC.

8. Konstruera en kvadrat med en fixerad mittpunkt.

9. Konstruera en liksidig triangel med en fixerad mittpunkt.

10. Fråga efter extrauppgifter.

1.2 Geometri med geogebra II

1. Bestäm inuti en given cirkel mängden av

(a) mittpunkter på kordor med given längd.

(b) kordor av given längd.

2. Två vinkelräta linjer OA och OB är givna liksom en punkt C inuti vinkeln AOB. Betrakta alla rektanglar $CDME$ sådana att punkten D ligger på linjen OA, medan punkten E ligger på linjen OB. Bestäm mängden av punkter M.

Instruktioner för uppgifterna nedan.

1. Konstruera en dynamisk bild.
2. Bestäm spåret som punkten i frågan lämnar.
3. Beskriv spåret med hjälp av de givna objekten i uppgiften.
4. När en hypotes om objektet är formulerad, stötta hypotesen genom att konstruera objektet på sättet som du beskrev det och kolla om det faktiskt sammanfaller med spåret.
5. Redovisa din hypotes.
6. Försök att bevisa hypotesen.

3. Inuti en triangel ABC betraktar man alla sträckor BD sådana att punkten D ligger på sidan AC. Bestäm mängden av mittpunkter till sådana sträckor BD.

4. På cirkeln med mittpunkten O är en punkt A given. Vi betraktar alla cirkelns kordor där A är ena ändpunkten. Bestäm mängden av mittpunkter på sådana kordor.

5. Punkterna A och B är givna. Betrakta alla linjer BC som går igenom punkten B samt normalerna till dessa linjer från A.

(a) Bestäm mängden är punkter D där normalen träffar linjen.

(b) Bestäm mängden av punkter E som är spegelsymmetriska till A kring BC.

6. En cirkel är given. På cirkeln ligger fixerade punkter A och B samt en punkt C som ”springer runt” på cirkeln.

(a) Bestäm spåret av höjdernas skärningspunkt i triangeln ABC.

(b) Bestäm spåret av bisektrisernas skärningspunkt i triangeln ABC.

(c) Bestäm spåret av medianernas skärningspunkt i triangeln ABC.

7. I en given spetsvinklig icke-likbent triangel skriver man in rektanglar på så sätt att två av rektangelns hörn ligger på basen medan de andra två hörnen ligger på de övriga två sidorna. Bestäm mängden av diagonalernas skärningspunkter på sådana rektanglar.

1.3 Geometri med geogebra III

1. En vinkel och en punkt A inuti den är givna. Konstruera en sträcka med ändpunkterna på vinkelns strålar som går igenom punkten A och delas av den mitt itu.

2. Skriv in en kvadrat i en given spetsvinklig triangel på så sätt att två av kvadratens hörn ligger på triangelns ena sida medan de övriga två hörnen ligger på de övriga två triangelns sidor.

3. Givna är en cirkel och en sträcka AB som är kortare än cirkelns diameter. Konstruera en korda till cirkeln som är lika lång som AB och parallell med den.

4. En vinkel och en punkt A inuti den är givna. Konstruera en sträcka med ändpunkterna på vinkelns strålar som går igenom punkten A och delas av den i förhållandet 1:2.

5. Givna är två linjer som skär varandra samt en sträcka AB som inte är parallell med någon av linjerna. Förbind linjerna med en sträcka som är lika lång som AB och parallell med den.

6. Skriv in en liksidig triangel i en given spetsvinklig triangel ABC (det vill säga, den liksidiga triangelns hörn ska nudda var sin sida på den givna triangeln) så att en av dess sidor är parallell med AB.

7. En linje, två cirklar på var sin sida om den samt en sträcka är givna. Konstruera en likbent triangel på så sätt att dess bashörn ligger på var sin cirkel, medan höjden till basen är lika lång som den givna sträckan samt ligger helt på den givna linjen.

8. Två cirklar ω_1 och ω_2 samt en punkt A är givna. Konstruera en kvadrat $ABCD$ så att punkten B ligger på cirkeln ω_1 medan punkten

   (a) C

   (b) D

   ligger på cirkeln ω_2.

1.4 Geometri med geogebra IV

1. En cirkel och en punkt A inuti den är givna. Dra en korda till cirkeln genom A som har

   (a) den största möjliga längden.

   (b) den minsta möjliga längden.

2. En icke-likbent triangel ABC är given. Dra en linje genom A som ligger på samma avstånd från B som från C.

3. **(a)** Konstruera en punkt i planet som har minsta möjliga summan av avstånden till hörnen till en given konvex fyrhörning $ABCD$.

(b) * Samma fråga för en icke-konvex fyrhörning.

4. På hypotenusan AB utav den rätvinkliga triangeln ABC väljs en godtycklig punkt M. Från den är normalerna MK respektive MP dragna mot triangelns kateter. För vilket läge på M kommer längden av sträckan PK vara den minsta möjliga?

5. Bestäm en punkt inuti en spetsvinklig triangel för vilken summan av de sex avstånden till triangelns hörn och sidor är den minsta möjliga.

6. På basen AB till den likbenta triangeln ABC har man valt en godtycklig punkt M. Från den har man dragit normalerna MP och MK mot triangelns övriga sidor. För vilket läge på M kommer summan $MP + MK$ vara den minsta möjliga?

7. En spetsvinklig icke-likbent triangel ABC är given. Dra en linje p genom hörnet A så att summan av avstånden från den till hörnen B och C blir den största möjliga.

8. En vinkel och en cirkel inuti den (som inte skär vinkelns sidor) är givna. Konstruera en punkt på cirkeln så att summan av avstånden från den till vinkelns sidor är

(a) den minsta möjliga.

(b) den största möjliga.

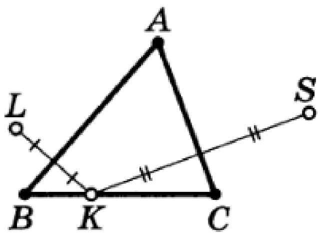
1.5 Geometri med geogebra V

1. Två cirklar med samma radie tangerar varandra i punkten K. Sidorna till en rät vinkel med hörnet K skär ena cirkeln i punkten A och den andra i punkten B. Vad bevaras i denna konstruktion då punkten A rör sig längs med sin cirkel?

2. Genom medianernas skärningspunkt M i en triangel går linjen p. Avstånden från hörnen A, B, C till linjen p är lika med a, b, respektive c. Bestäm ett samband mellan a, b och c.

> I vart och ett av problemen nedan ska man konstruera en bild och upptäcka någon *invariant*, det vill säga något som inte förändras. Det kan vara mått (längder, vinklar) eller relationer mellan objekt (vara parallella, lika långa etc.). Bevisa sedan att invarianten stämmer.

3. På sidan BC utav en spetsvinklig triangel ABC har man valt punkten K. Den punkten speglade man sedan kring linjerna AB respektive AC och fick punkterna L respektive S (se bild). Ange två lika långa sidor utav fyrhörningen $ASKL$ och två vinklar som inte ändras när punkten K rör sig på sträckan BC.

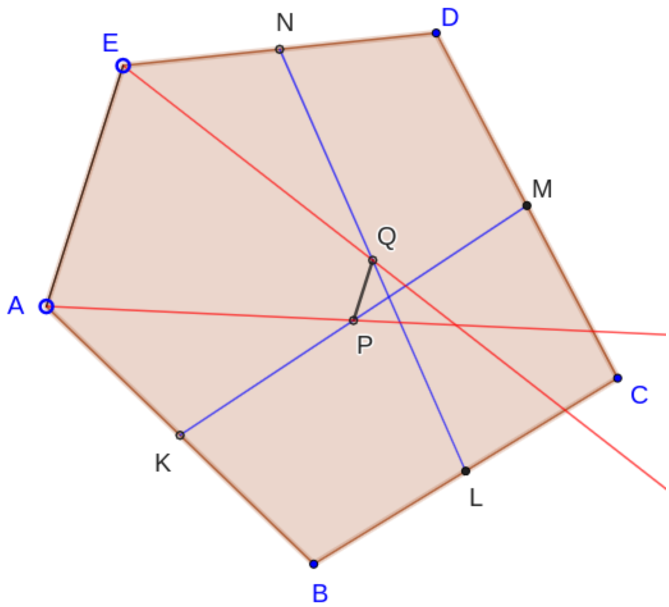


4. Låt D vara höjdernas skärningspunkt i en spetsvinklig triangel ABC. Bestäm sorten av fyrhörningen som har hörnen i mittpunkterna på sidorna i fyrhörningen $ABCD$ beroende på storleken utav vinkeln A.

5. Linjen p går igenom hörnet A utav parallellogrammet $ABCD$ och parallellogrammet ligger helt på ena sidan utav den linjen. Avstånden från hörnen B och D till linjen är b respektive d. Bestäm avståndet från punkten C till linjen p.

6. Det är känt att om man konstruerar kvadrater utåt på sidorna utav en kvadrat så kommer mittpunkterna för de nya kvadraterna också bilda en kvadrat. För vilka fler konvexa fyrhörningar gäller det att kvadrater byggda utåt bildar en ny kvadrat som man skulle markera deras mittpunkter?

7. I en godtycklig femhörning $ABCDE$ har man dragit en sträcka med ändarna i mittpunkterna på sidorna AB och CD, och på samma sätt med mittpunkterna för BC och DE. Mittpunkterna P och Q på de två nya sträckorna bildade återigen en sträcka. Därefter drog man strålarna AP och EQ, bara som en ledtråd till uppgiften (se bild). Punkterna A och E rör på sig godtyckligt. Bestäm egenskaper för sträckan PQ.



8. På koordinatplanet xOy har man konstruerat hyperbeln $y = \dfrac{1}{x}$. På den positiva grenen markerar man punkten A och drar en tangent i den punkten till hyperbeln.

Vi betraktar sträckorna OB och OC som tangenten skär av koordinataxlarna.

(a) Beskriv hur punkterna A, B, C relativt varandra.

(b) Vilken storhet är invariant när man flyttar punkten A på parabeln?

1.6 Geometri med geogebra VI

1. En linje m och två punkter A och B på samma sida om den är givna.

(a) Konstruera en punkt M på linjen m sådan att värdet av summan $AM + MB$ blir den minsta möjliga.

(b) Konstruera en sträcka CD av given längd på linjen m så att längden av polygontåget $ACDB$ är så liten som möjligt.

2. Från punkten M på den omskrivna cirkeln till triangeln ABC har man dragit normalerna MP och MQ på linjerna AB respektive AC. För vilket läge på punkten M är längden av sträckan PQ maximal?

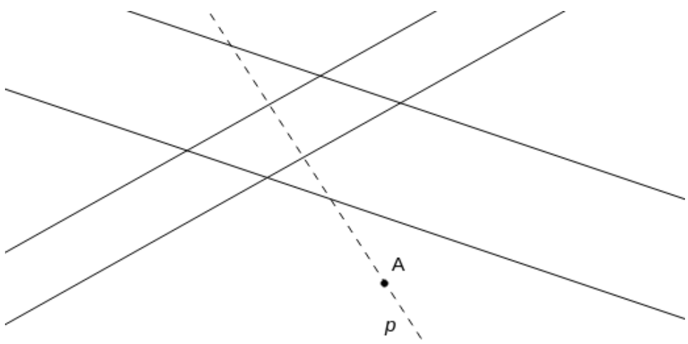
3. (Enklare varianten.) På ena benet av den spetsiga vinkeln A finns en punkt B utsatt. Konstruera en punkt X som ligger på vinkelns andra ben sådan att radien om den omskrivna cirkeln till triangeln ABX blir den minsta möjliga.

(Svårare varianten.) En triangel ABC är given. Bestäm en punkt M på linjen AB för vilken summan av radierna på de omskrivna cirklarna till trianglarna ACM och BCM blir den minsta möjliga.

4. På olika sidor om en flod finns två byar. Bygg en bro som är vinkelrät mot flodens kanter så att invånarna kan förflytta sig mellan byarna via den kortaste möjliga vägen. (Flodens kanter är två parallella linjer och byarna är punkter.)

5. Inuti en cirkel med mittpunkten O finns en punkt A given. Bestäm en punkt M på cirkeln för vilken vinkeln OMA är den största möjliga.

6. Det finns två par parallella linjer och en punkt A (se bilden). Dra en linje p genom punkten A på så sätt att sträckorna som de parallella linjeparen skär av linjen p blir lika långa.



7. Längderna på en fyrhörnings diagonaler samt vinkeln mellan diagonalerna är givna. För vilket läge på diagonalerna (relativt varandra) blir omkretsen på fyrhörningen den minsta möjliga?

8. En kvadrat som heter Herbert är given. Dra en linje för vilken summan av kvadraterna på avstånden till Herberts hörn är den minsta möjliga.

9. En punkt M ligger inuti en spetsig vinkel O. Dra en sträcka AB genom M med ändarna på vinkelns sidor så att $\frac{1}{AM} + \frac{1}{BM}$ blir så stort som möjligt.

1.7 Geometri med geogebra VII

> Jobba i grupper om 2-3 personer. Välj ett problem att lösa och förbered en poster där lösningen (eller så långt som ni har kommit) presenteras. Efter cirka halva lektionen har vi en konferens: en medlem i gruppen presenterar postern, medan andra går runt och lyssnar på andra gruppers presentationer. Sedan byts man av i gruppen, dvs någon ny presenterar och de andra går runt.

Problemen 1-3 är relaterade liksom problemen 4-6 och 7-8.

1. På sidorna utav triangeln ABC har man byggt kvadraterna $ABKP$ och $BCGF$ utåt. Undersök hur sträckorna AF och KC relaterar till varandra samt hur linjerna AF, KC och PG ligger i förhållande till varandra.

2. På sidorna utav triangeln ABC har man byggt kvadraterna $ABKP$ och $BCGF$ utåt. Man markerade punkterna I som är mittpunkten av sträckan AC och J om är mittpunkten av sträckan KF och dessutom mittpunkterna på kvadraterna O och R. Bestäm typen av fyrhörningen $OIRJ$.

3. För varje punkt B på en halvcirkel med diametern AC (B skiljer sig från A och C) har man byggt kvadrater på sidorna AB och BC utåt. Bestäm mängden av mittpunkter M på sträckor som förbinder dessa kvadraters mittpunkter.

4. Två cirklar som skär varandra i punkterna A och B är givna. För en godtycklig linje p genom A betecknar vi de övriga skärningspunkterna mellan linjen och cirklarna med K och L. Konstruera en sådan linje som inte sammanfaller med AB så att $AK = AL$.

5. Två cirklar som skär varandra i punkterna A och B är givna. För en godtycklig linje p genom A betecknar vi de övriga skärningspunkterna mellan linjen och cirklarna med K och L. Bestäm mängden av mittpunkterna på sträckorna KL för alla möjliga p.

6. Två cirklar som skär varandra i punkterna A och B är givna. För en godtycklig linje p genom A betecknar vi de övriga skärningspunkterna mellan linjen och cirklarna med K och L. Konstruera en sådan linje p_2 så att längden av KL blir så stor som möjligt.

7. En cirkel med mittpunkten O är given, punkten P ligger inuti cirkeln. Man drar två vinkelräta kordor genom P, AC och BD. Sträckan KL förbinder mittpunkterna K och L på sträckorna AB respektive CD. Beskriv hur sträckorna KL och PO ligger i förhållande till varandra om AC roteras runt P.

8. Se det föregående problemet. Genom punkten K drar man en cirkel med mittpunkten G som är skärningen mellan sträckorna KL och PO. I vilka fler punkter skär cirkeln fyrhörningen $ABCD$?

2. Abstract Algebra

2.1 Groups

1. An operation on a Rubix cube is a series of rotations. Show that if we keep applying an operation to a Rubix cube, sooner or later the Rubix cube will appear as it started. Does there exist an operation such that every state of the Rubix cube will appear sooner or later if we keep applying this operation? How can you generalize this to shuffles of a deck? To shuffles of a deck of set-cards that preserve sets? To make a general theory, how would you define a group?

Definition. A group is a set G together with an operation denoted $\star$ that combines any two elements a, b in G and forms a new element $a \star b$ in G such that the following three requirements hold:
Associativity For all a, b, c in G we have $(a \star b) \star c = a \star (b \star c)$.
Identity element G contains an element e that satisfy $a \star e = e \star a = a$.
Inverse element For all a in G there exist an element b in G that satisfy $a \star b = b \star a = e$. b is called the inverse to a.

Definition. The size of the set G is called the *order* of the group and is denoted by $|G|$.

2. Show that the identity element e is unique.

3. Show that for every element a, its inverse b is unique. Denote the inverse to a by a^{-1}.

4. Show

(i) $(a^{-1})^{-1} = a$

(ii) $(a \star b)^{-1} = (b^{-1}) \star (a^{-1})$

5. Let G denote the set of numbers on the form $a + b\sqrt{2}$ where a, b are rational.
(i) Prove that G is a group under addition.
(ii) Prove that the nonzero elements of G are a group under multiplication.

6. Show that if $|G|$ is even, then G contains an element $x \neq 1$ such that $x^2 = 1$.

7. Show that a finite group G can never be written as the union of two proper subgroups H_1, H_2. (Here *proper* means that $H_1, H_2 \neq G$.)

Definition. A group G is called *Abelian* if for all a, b in G we have

$$a \star b = b \star a.$$

8. Show that if $x^2 = 1$ for all x in G then G is Abelian.

Definition. A subset H of G is called a *subgroup* if for all x, y in H then $x \star y, x^{-1}$ also lie in H. This implies that H is itself a group.

9. Find subgroups of

- $\mathbb{Z}$
- S_n the group of shuffles of a deck of n cards
- The group of continuous bijections of the real plane $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

10. There are n buttons that control the lamps in the house. After pressing a button, a set M_n of lights in the house switch (the sets can overlap). Prove that the number of states the lamps can be in is equal to some power of 2.

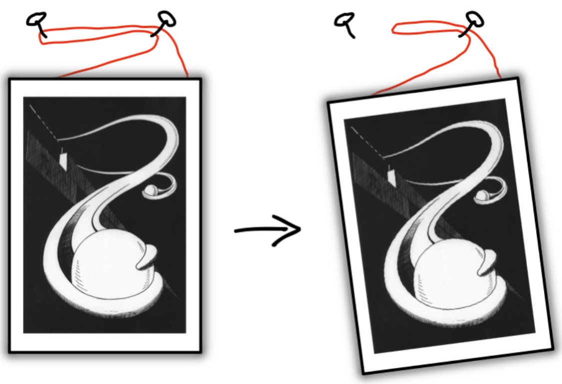
11. **Lagrange's Theorem** Let H be a subgroup of a finite group G. Show that $|H|$ divides $|G|$. (Try to do it first when G is abelian).

12. How can we use Lagrange's Theorem to show Fermat's little theorem:

$$p \,|\, a^{p-1}$$

for all primes p and integers a?

13. Is it possible to hang a picture in n nails such that, no matter what nail you remove the picture will fall?



A. Fomenko

14. The magician places n coins on a table and leaves the room. His assistant asks a representative of the audience to place the coins next to each other from left to right, on whatever side that he desire. The audience is then asked to point at one of the eight coins, after which the assistant flips exactly one coin of his choice. The magician returns to the room and to everyone's astonishment he identify the coin of the audience's choice. How can this magic trick be performed when $n = 8$? For what other values of n is this possible?

Idea: Find a group operation on the set of non-negative integers $\mathbb{N}_0$

2.2 Ring theory - Polynomials

Definition. $\mathbb{Z}[x]$ denotes the ring of polynomials in one variable with integer koefficients. Similarly, $\mathbb{Q}[x], \mathbb{R}[x], \mathbb{C}[x]$ denotes the set of polynomials in one variable with rational, real and complex coefficients respectively. When we write $\mathbb{K}[x]$ we could mean any field $\mathbb{K}$.

Definition. Let $P(x), Q(x) \in \mathbb{K}[x]$. We say that $P[x]$ divides $Q(x)$, that is $P(x) \mid Q(x)$ if there is a polynomial $S(x) \in \mathbb{K}[x]$ such that $Q(x) = P(x) \cdot S(x)$.

1. For what values of a, does $x+1$ divide $x^{1000} + a \cdot x^2 + 9$ in $\mathbb{Z}[x]$?

2. Is $(x+1)^6 - x^6 + 2x - 1$ divisible by $x(x-1)(x-2)$ in $\mathbb{Z}[x]$?

3. For what values of a and b is $(a+b)x^5 + abx^2 + 1$ divisible by $x^2 - 3x + 2$ in $\mathbb{Q}[x]$?

4. For what values of p and q is $x^4 + 1$ divisible by $x^2 + px + q$ in $\mathbb{R}[x]$?

Definition. The *remainder* of $P(x)$ by division with $Q(x)$ is the polynomial $D(x)$ such that the degree of $D(x)$ is smaller than the degree of $Q(x)$.

5. Find the remainder of $P(x) = x^{81} + x^{27} + x^9 + x^3 + x$ when dividing by
a) $x - 1$; b) $x^2 - 1$.

6. A polynomial $P(x)$ has the remainder 2 when dividing by $x - 1$, and remainder 1 when dividing by $x - 2$. What is the remainder of $P(x)$ when dividing by $(x-1)(x-2)$?

7. Let $P(x) = (2x^2 - 2x + 1)^{17}(3x^2 - 3x + 1)^{17}$. Find
a) the sum of all koefficients of of this polynomial (when the brackets are multiplied out).
b) the sum of all koefficients before even powers of x.

8. Find polynomials $P(x), Q(x)$ wuch that
a) $(x+1)P(x) + (x^4 + 1)Q(x) = 1$
b) $P(x)(2x^3 - 7x^2 + 7x - 2) + Q(x)(2x^3 + 2x + x - 1) = 2x - 1$

9. Define what it means for a polynomial to be a "prime" in $\mathbb{K}[x]$ and find the prime polynomials of small degree for $\mathbb{K} = \mathbb{N}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$. Now state and prove a theorem analogous to the fundamental theorem of arithmetics (that every positive positive integer has a *unique* factorization into prime numbers) for $\mathbb{Q}[x]$. What about the other rings $\mathbb{R}[x], \mathbb{C}[x], \mathbb{N}[x]$?

10. Formulate a theorem about polynomials, analogous to the Chinese remainder theorem for integers. What about the other rings $\mathbb{Q}[x], \mathbb{R}[x], \mathbb{C}[x]$?

2.3 Ring theory

Definition. A ring is a set R together with two operations $\cdot$ and $+$ that combines two elements and form new elements $x \cdot y$ and $x+y$. We call the operations for multiplication and addition respectively. The operations must satisfy the following conditions: $(R,+)$ forms a abelian group, that is **Associativity** $(a+b)+c = a+(b+c)$.
Identity element R contains an element 0 that satisfy $a+0 = 0+a = a$.
Inverse element For all a in R there exist an element $(-a)$ in R that satisfy $a+(-a) = (-a)+a = 0$.
Furthermore we have
Commutativity a + b = b + a **Associativity** $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$.
Distributive law $a \cdot (b+c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$.
Identity element R contains an element 1 that satisfy $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$.
Commutativity $a \cdot b = b \cdot a$

1. (*) We actually don't need to require that the group $(R,+)$ is abelian. It follows by the other assumptions.

2. Show that

- $(-1) \cdot (-1) = 1$.
- $0 \cdot a = a \cdot 0 = 0$
- $(-a) \cdot b = a \cdot (-b) = -(a \cdot b)$
- $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$
- $-a = (-1) \cdot a$

3. Let S be a set. The power set $P(S)$ is the set of all subsets of S. For any subsets $A, B \in P(S)$ we define $A+B$ to be the set of elements that are contained in exactly one of A and B, and we define $A \cdot B$ to be the set of elements that are contained in both A and B. Show that this is indeed a ring and identify the additive and multiplicative identity.

4. Prove that the following sets form rings with the usual addition and multiplication of real and complex numbers:

- $\{a+b\sqrt{-2} \quad | \quad a,b \in \mathbb{Z}$
- $\{a+bi \quad | \quad a,b \in \mathbb{Z}\}$ where $i^2 = -1$ (Gaussian integers).
- $\{a+b\varepsilon \quad | \quad a,b \in \mathbb{Z}\}$ where ε is a third primitive root of 1, that is $\varepsilon = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ (Eisenstein integers).

5. What is the “smallest” ring that contain $\mathbb{Z}[x]$ and x^{-3}?

Definition. a divides b if there exist an element c such that $a \cdot c = b$. An element e is called a unit, if e divides every other element. An element p is called a prime, if whenever $a \cdot b = p$ then p divides either a or b. If a ring R has contains no divisors of 0 then R is called integral.

6. Let R be the ring of functions from the closed interval $[0,1]$ to $\mathbb{R}$. Addition and multiplication work as “expected”. Show that if $f \in R$ is not zero and not a unit, then f is a zero divisor.

7. Let R be the ring of all continuous functions from the closed interval $[0,1]$ to $\mathbb{R}$. Addition and multiplication work as “expected”. Find an element of R that is neither a unit or a zero divisor.

8. Assume a, b, c are elements of any ring with a not a zero divisor. If $ab = ac$, then show that either $a = 0$ or $b = c$. Give an example to show that this does not necessarily hold if a is a zero divisor.

9. Prove that if R is an integral ring and $x^2 = 1$ for some $x \in R$ then $x = 1$ or $x = -1$.

Definition. A Euclidean ring is an integral ring R where Euclids algorithm works: There is a norm N that assigns a non-negative integer $N(r)$ to every element r in R such that for all $a, b \in R$ we can find $c, d \in R$ such that

$$a = b \cdot c + d$$

and $N(d) < b$.

10. Define GCD and LCM for Euclidean rings. Show that if $GCD(x,y) = 1$ then for some $\alpha, \beta \in R$ we can write $\alpha \cdot x + \beta \cdot y = 1$. (Bezout’s identity)

11. Show that if $p \in R$, then if p does not divide $a \in R$ then $GCD(p,a) = 1$. Now show that if $p | a \cdot b$ then either $p | a$ or $p | b$.

12. Show by induction, that in a Euclidean ring R we have unique factorization of any element into primes (up to multiplication by a unit).

13. Give an example of a ring where we have unique prime factorization, but the ring is not Euclidean. Consider the examples from earlier, which rings are Euclidean, and which have unique prime factorization? Can you find the primes?

14. Find all integer solutions to

$y^2 + 1 = x^3$

$y^2 + 2 = x^3$

$y^2 + 11 = x^3$

3. Konvergens

3.1 Oändliga summor

1. What value would you assign to the sum

- $1+1+1+\dots$
- $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\dots$
- $\frac{9}{10}+\frac{9}{100}+\frac{9}{1000}+\frac{9}{10000}+\dots$
- $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\dots$

2. Can you find a simple argument why the sum

$$1+\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^3}+\dots$$

will converge to a real number when $a > 2$?
Can you find this number, and what happens when $0 < a < 2$?
(*) What happens when $a < 0$?

3. Mattekollo was a great success in the year 2022 with an infinite number of participants. They were all standing in an infinite queue starting with Alex in the kitchen and continuing and continuing forever, everyone waiting to receive their T-shirt. Show that Valentina can *remove* some of the participants such that the remaining participants are standing in the line ordered by their height. (No two people have the same height).

Definition. An infinite sum of positive numbers $x_1+x_2+x_3+\dots$ is said to converge if ???

4. What value would you assign to

- $1-1+1-1+1-1+\dots$
- $\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{1}{16}+\dots$
- $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\dots$
- $1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\dots$

5. Give some examples of converging sums that converge to a different limit or even diverge after we rearrange their order. Give examples of sums that converge to the same number after we rearrange their order. For your examples show that their limit doesn't change, no matter how we rearrange their order.

6. Find the limit

- $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\dots$
-

7. Leonhard Euler showed in 1734 that

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\dots \longrightarrow \frac{\pi^2}{6}$$

This is a very difficult problem and it was unsolved since Pietro Mengoli stated the theorem in 1650. Can you should that this sequence must converge to some number?

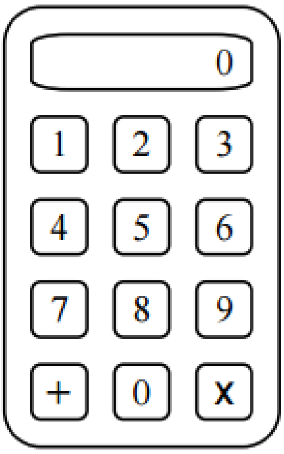
8. You have an infinite set of rectangles and for any number N, there is a set of rectangles with total area greater than S. Is it possible to cover the entire plane with this set if the rectangles are allowed to overlap? What if they are rectangles instead of squares?

3.2 Talföljder

1. What value would you assign to the limit of x_n when $n \to \infty$?
   - Let $x_n = \frac{1}{n}$. Show that $x_n \longrightarrow 0$
   - Let $x_n = \frac{n}{n+1}$. Show that $x_n \longrightarrow 1$.
   - Let $x_n = \frac{3x+n+2}{n+2}$. Show that $x_n \longrightarrow 3$.
   - Let $x_n = \frac{\sin(n)}{n}$. Show that $x_n \longrightarrow 0$.
   - Let $x_n \longrightarrow \infty$. Show that $\frac{1}{x} \longrightarrow 0$.
   - Let $x_n = \frac{n^2}{1{,}001^n}$. Show that $x_n \longrightarrow 0$.
2. What value would you assign to the limit of x_n when $n \to \infty$?
   - $x_n = \frac{1-3n^4}{n^4-5n^3+n}$
   - $\frac{n^2+2\sin(n)}{5+6n^2}$
   - $\frac{1}{\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n}}$
3. What value would you assign to the limit of x_n when $n \to \infty$?
   - $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n^2}$
   - $a_1 = 0, \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + 1$
   - $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \sqrt{2a_n}$
   - $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{1}{1+a_n}$

Definition. An infinite series $x_1, x_2, x_3, \ldots$ is said to converge if ???

4. A calculator contains numbers from 0 to 9 and addition and multiplication (see figure). Initially, the display shows the number 0. The absent minded mathematicians presses a lot of buttons and multiplies and adds **a lot** of numbers together. What the (aproximate) probability that the number on the display is even?



5. Say we want to find $\sqrt[3]{x}$ on an old calculator that only have the action-buttons

$$+ \quad - \quad \times \quad \div \quad \sqrt{}$$

What do we do? We continue the sequence

$$y_0 = \sqrt{\sqrt{x}}, \quad y_{n+1} = \sqrt{\sqrt{x \times y_n}}$$

a) Show that $y_n \to \sqrt[3]{x}$ as $n \to \infty$.
b) Find an analogous algorithm that gives $\sqrt[5]{x}$.

6. If you know that

$$\left(a_{n+1} - \frac{a_n}{2}\right) \longrightarrow 0 \qquad \text{when } n \longrightarrow \infty, \qquad \text{show that}$$

$$a_n \longrightarrow 0 \qquad \text{when } n \longrightarrow \infty$$

7.

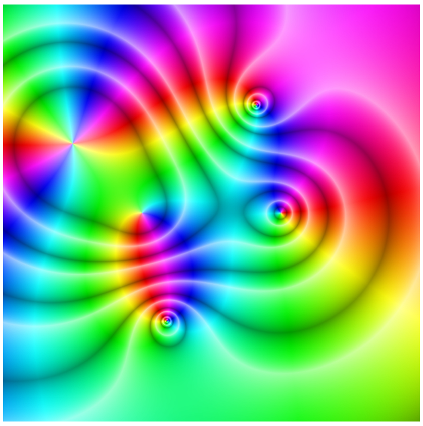
- Show that $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ has a limit $e \in \mathbb{R}$.
- Show that $2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} \longrightarrow e$.
- Show that e is irrational.

8. On the occasion of the beginning of winter holidays, all boys from 8B went to the shooting gallery. It is known that there are n boys in 8B. In the shooting gallery where the guys went, there are n targets. Each of the boys randomly choose a target for himself, and some of the guys might the same target. After that everyone

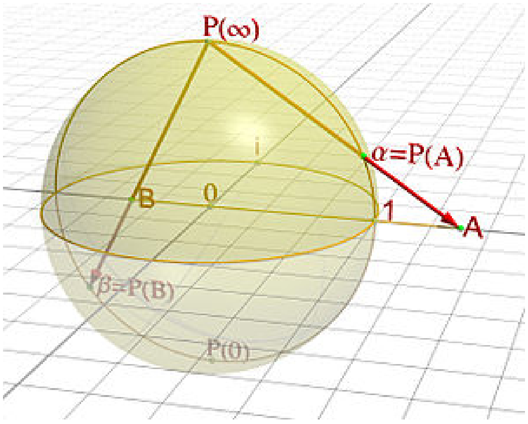
simultaneously fires a at their targets. It is known that each of the boys hit their target. The target is considered hit if at least one boy hits it.
a) Find the average number of targets hit.
b) Can the average number of targets hit be less than $n/2$?

4. Komplex analys

4.1 Komplex analys I



(a) Exempel på en plottad komplex funktion



(b) Riemannsfären

9. Hur många lösningar $z = a + bi$ finns till $z^8 = 16$ där $a, b \in \mathbb{Z}$?

10. Förenkla $\dfrac{(2+7i)(12+9i)}{3-4i}$ (till formen $a + bi$ där $a, b \in \mathbb{R}$). *Det finns ett litet trick; kan lösas utan penna och papper.*

11. Visa att $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\bar{z}}{|z|^2}$.

12. Hitta samtliga lösningar till $z^3 - z^2 + 2z - 2 = 0$.
Ledning: minst en rot har realdel lika med noll.

13. Beräkna i^{-i}.

14. Hur tror du att logaritm-funktionen definieras i komplex analys? Vad har den för egenskaper? Vad är till exempel $\mathrm{Re}(\log(z))$ och $\mathrm{Im}(\log(z))$?

15. Lös ekvationen $e^{2z} + e^z + 1 = 0$.

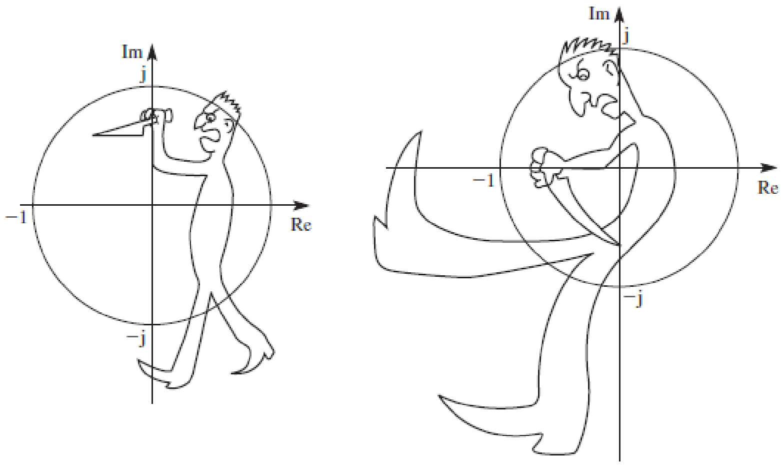
16. Figuren nedan visar vad som händer den arga mannen som ritats på det komplexa talplanet när varje punkt z avbildas på z^2. Förklara varför

(a) kniven förflyttats närmare origo men blivit längre;

(b) mannens underarm har gått från att vara vertikal till horisontell;

(c) hans skor har vuxit mer än hans huvud;

(d) han har huggit sig själv i magen.



17. Ge exempel på funktioner $f(z)$ som ger följande avbildningar $z \mapsto f(z)$ *konformt* (bevarar vinklar):

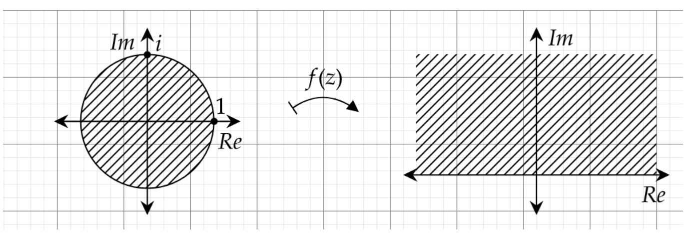
(a) $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) \geq \frac{1}{2}\} \mapsto \mathscr{H}$, där $\mathscr{H}$ är det övre halvplanet (inklusive den reella axeln).

(b) $\{z \in \mathbb{C} : \frac{\pi}{4} > \mathrm{Arg}(z) > 0\} \mapsto \mathbb{C} \setminus \mathscr{H}$

(c) $\bar{D}(0,1) \mapsto \mathbb{C} \setminus \bar{D}(0,1)$ där $\bar{D}(c,r)$ är den **slutna skivan** (*eng.: "disk"*) med centrum c och radie r, dvs. $\{z : |z-c| \leq r\}$.

(d) $\{z \in \mathbb{C} \setminus \bar{D}(0,1) : \frac{\pi}{2} > \mathrm{Arg}(z) > 0\} \mapsto \bar{D}(0,1)$

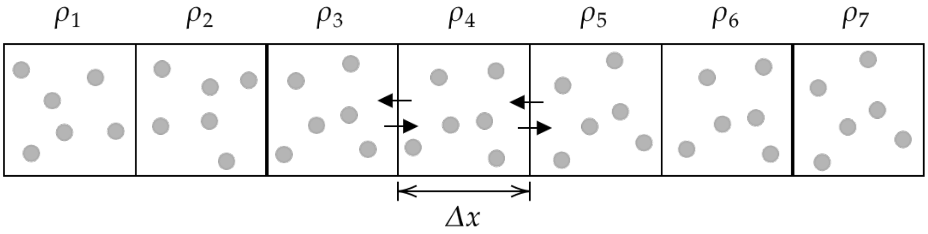
(e) $\bar{D}(0,1) \mapsto \mathscr{H}$



18. Show that $\sin(x+iy) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$, for all $x, y \in \mathbb{R}$.

19. Find a non-trivial complex-analytic map from $\mathbb{C}^2$ to $\mathbb{C}^2 \setminus \mathbb{Z}^4$ using the following article: `https://arxiv.org/pdf/math/9903193.pdf`

4.2 Komplex analys II: ”En tangent”



Partiella differentialekvationer

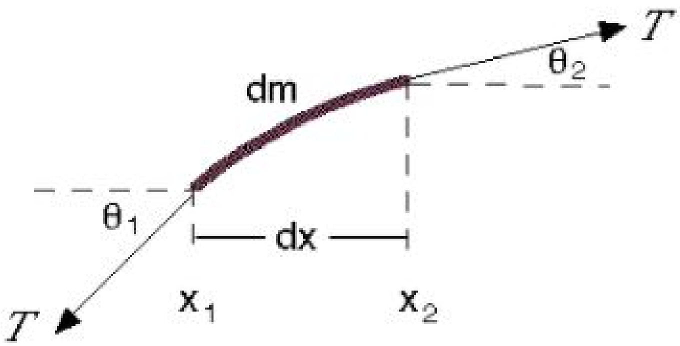
1. Vad är $\frac{\partial}{\partial x}(x^2y^2 + e^{2x}e^y + 3y)$ och $\frac{\partial}{\partial y}(x^2y^2 + e^{2x}e^y + 3y)$?

2. Visa att $u(x,t) = \sin(n\pi x)e^{-n^2\pi^2 t}$ löser värmeledningsekvationen/diffusionsekvationen $\frac{\partial u}{\partial t} = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ (D är diffusiviteten). Om du kan Fourieranalys: visa hur man hittar funktionen.

3. Givet nedanstående bild och givna formler till eventuell hjälp, försök härleda vågekvationen i en dimension:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{T}{\mu}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

där μ är linjärdensiteten för strängen (kg/m) och T är spännkraften (N) (eng: *tension*). Newtons II-lag $F = ma$ och småvinkelsapproximationen (egentligen Taylorutveckling) $\sin\theta \approx \tan\theta = \frac{\partial y}{\partial x}$ kan vara till hjälp.



4. Visa att en godtycklig propagerande sinusvåg är en lösning till vågekvationen, det vill säga $y = A\sin(kx - \omega t)$. A, k, ω är konstanter. Finns det några restriktioner på dessa? Fundera även på hur detta relaterar till gitarrsträngar och dess ljud.

5. **Extra:** Är partialderivator alltid kommutativa?

Komplexa analytiska funktioner

Sats 4.1. En komplex funktion $f(z) = f(a+bi) = u(a,b) + iv(a,b)$ är *analytisk* kring z_0 omm $f(z_0)$ är deriverbar i en närhet av z_0.

6. Visa att funktionen $\dfrac{1}{z^2+1}$ är analytisk kring $z = 3i$.

Sats 4.2. **Cauchy-Riemann ekvationerna.** En komplex funktion $f(z) = f(x+yi) = u(x,y) + iv(x,y)$, $u, v \in C$ är analytisk omm Cauchy-Riemann ekvationerna är uppfyllda.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

7. Visa med C-R ekvationerna att $f(z) = z^2$ är analytisk överallt.

8. Visa med C-R ekvationerna var $f(z) = \dfrac{1}{z}$ är analytisk.

9. Visa att om $f(z) = z\bar{z}$ så existerar $f'(z)$ endast i $z = 0$.

Definition. En funktion f är komplext analytisk på en öppen mängd D i det komplexa planet om man för varje $z_0 \in D$ kan skriva

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = a_0 + a_1 (z - z_0) + a_2 (z - z_0)^2 + a_3 (z - z_0)^3 + \cdots$$

var $a_0, a_1, \ldots$ är komplexa tal och summan konvergerar till $f(z)$ för z i en närhet av z_0.

10. Visa att följande komplexa funktioner är analytiska:

(a) alla komplexa polynom,

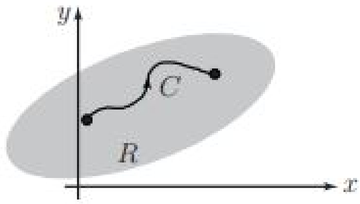
(b) exponentialfunktioner.

11. Visa att funktionen $f(z) = \bar{z}$ *inte* är analytisk någonstans.

4.3 Komplex analys III: Integration

Definition. **Komplex integration.** Om $f(z) = f(x+iy)$ är en envärd och kontinuerlig funktion i någon region R i det komplexa planet så definierar vi integralen av $f(z)$ längs en väg C i R (se figur) som

$$\int_C f(z)dz = \int_C (u+iv)(dx+idy)$$



I definitionen delas $f(z)$ och dz upp i real- och imaginärdel:

$$f(z) = u + iv \quad \text{och} \quad dz = dx + idy$$

varför vi kan dela upp integralen enligt följande:

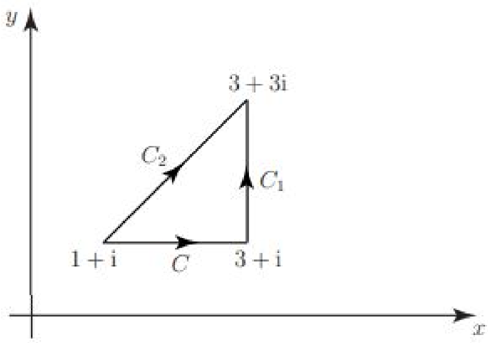
$$\int_C f(z)dz = \int_C (udx - vdy) + i\int_C (vdx + udy)$$

1. **(a)** Lös den komplexa integralen $\int_C zdz$, där C är den raka vägen från $z = 1+i$ till $z = 3+i$ (se figur).

   (b) Som ovan fast för C_1.

   (c) Som ovan fast för C_2.

   (d) Finn sambandet.



2. Lös $\oint_C \frac{1}{z}dz$, där C är enhetscirkeln.
3. Låt $a_n = \int_C z^n dz$, där C är

   (a) kvartscirkeln i första kvadranten,

   (b) kvartscirkeln i andra kvadranten,

   (c) halvcirkeln i nedre halvplanet.

   (d) enhetscirkeln.

(e) på nästa sida

   (e) Ser du något mönster? Vad händer om vi tar en cirkel med annan radie men samma centrum? Vad händer om funktionen istället är $1/(z-a)^n$?

Sats 4.3. **Cauchys sats.** Om $f(z)$ är analytisk överallt inom ett område utan hål (*s.k. "simply-connected"*) så är

$$\oint_C f(z)dz = 0$$

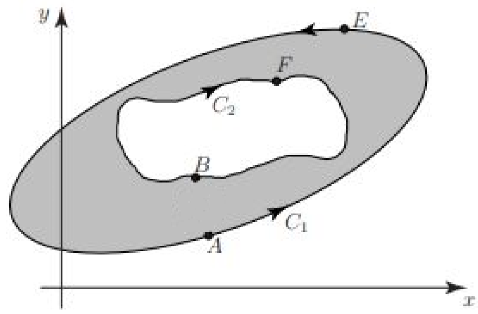
för varje simpel sluten väg C i området. *För en sluten kurva räknas moturs som positiv riktning.*

4. Visa att en komplex integral mellan två godtyckliga punkter A och B har samma värde oberoende väg mellan A och B givet att $f(z)$ är analytisk i integrationsområdet.

5. Visa att

$$\oint_{C_1} f(z)dz = -\oint_{C_2} f(z)dz$$

Anta att $f(z)$ är analytisk i det grå området. Kurvriktning är som i figuren.



Sats 4.4. **Cauchys integralsats.** Om $f(z)$ är analytisk inuti och på randen av en kurva C som innesluter ett sammanhängande område så gäller för varje z_0

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i f(z_0).$$

6. Beräkna

$$\oint_C \frac{z}{z^2+1} dz$$

där

(a) $C : |z - i| = \frac{1}{2}$,

(b) $C : |z| = 2$,

(c) **Extra:** formulera en förmodan.

7. Använd följande funktion $f(z)$ för att lösa Baselproblemet.

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint \pi \cot(\pi z) \frac{1}{z^2}\, \mathrm{d}z \qquad \text{Basel sum: } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

8. Låt $f(z)$ vara en funktion sådan att $f(z) = \dfrac{1}{z}$ då $|z| = 3$. Kan det hända att $f(z)$ är analytisk överallt?

4.4 Komplex analys IV

Försök först lösa problem 3-6 från lektion III. Samarbeta gärna.

Mindre komplext med komplext

- identifiera något som en realdel/imaginärdel av en komplex funktion,
- beräkna problemet med en komplex funktion,
- ta realdel/imaginärdel av resultatet.

1. Beräkna $\frac{\mathrm{d}^9}{\mathrm{d}x^9}\left(e^{\frac{\sqrt{3}}{2}x}\sin(\frac{x}{2})\right)$.

Sats 4.5. **Rouchés sats.** För två komplexa analytiska funktioner f, g i något område K, om $|f(z)| > |g(z)|$ på randen av K (dvs. på ∂K) så har f och $(f+g)$ lika många nollställen i K (räknat med multiplicitet).

2. **(a)** Hur många nollställen har $z^5 + 3z^3 + 7$ i cirkeln $|z| < 2$?

(b) Visa att alla nollställen till polynomet $p(z) = z^4 - 2iz^3 + 16$ ligger inom $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 3\}$. Hur många nollställen har både negativ real- och imaginärdel?

Sats 4.6. **Cauchys generaliserade integralsats.**

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz$$

3. Visa att $\lim_{|z|\to\infty} |e^{iz}| \leq 1$ för $z \in \mathscr{H}$ (övre halvplanet).

4. Bestäm med hjälp av Cauchys generaliserade integralsats:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)^2}dx$$

Ledning: integrera över en halvcirkel.

5. **Cauchys olikhet.** *Ledning: Använd summa-definitionen av analytisk funktion från L2.* Visa att om f är analytisk i $r_1 < |z| < r_2$ så är

$$|a_n| \leq \frac{\max_{|s|=\rho}|f(s)|}{\rho^{n+1}}, \quad r_1 < \rho < r_2$$

där a_n, $n \in \mathbb{Z}$ är koefficienterna i definitionen av analytisk funktion. *Använd detta resultat som en sats om du vill gå vidare.*

6. **Liouvilles sats.** Visa att om f är analytisk och begränsad så är f konstant. *Ledning: kalla M för funktionens maxvärde och använd Cauchys olikhet.*

5. Game Theory

5.1 Axiom of Choice

Definition. A partial order on a set X is a relation $\preceq$ that compares some (not necessarily all) of the elements in X. It must satisfy the following properties, for each a, b, c in X:

Reflexive	$a \preceq a$
Transitive	If $a \preceq b$ and $b \preceq c$ then $a \preceq c$
Antisymmetric	If $a \preceq b$ and $b \preceq a$ then $a = b$

Zorn's Lemma Suppose a partially ordered set P has the property that every chain $x_1 \preceq x_2 \preceq x_3 \preceq \dots$ has an upper bound x in P such that $x_i \preceq x$ for all $i \in \mathbb{N}$. Then there is a "maximal" element m in P: Meaning that P does not contain any element y such that $m \preceq y$.

7. (*) Consider a two-player game with no randomness, with no secret information, that will terminate sooner or later, and can not end in a draw[1]. Show that one of the players will have a strategy that can secure him the victory.

Definition. A total order on a set X is a relation partial order $\preceq$ that is also total:

Total	Either $a \preceq b$ or $b \preceq a$

Definition. A well-order on a set X is a total-order such that every subset S of X has a least element s in S, such that $s \preceq x$ for all $x \in S$.

Zermelo's Theorem Every set has a well-ordering of its elements.

8. (**) Show that Zorn's Lemma is equivalent to Zermelo's theorem.

9. Can you find a well-order on the following sets:

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \cdots\}$
- $\mathbb{Z} = \{\cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$
- $\mathbb{Q} = \{a/b \quad | \quad a, b \in \mathbb{Z}\}$

10. Given a well-order on a set M, and another well-order on a set N, how can you find a well-order on the set $N \times M = \{(a, b) \quad | \quad a \in N, b \in M\}$?

11. Prove that there exists a subset A of the real plane $\mathbb{R}^2$ such that every line intersects A in exactly two points.

[1] Examples could be Hex, (infinite) Nim, even Chess if you define black to be the winner if the game is a draw.

12. Prove write $\mathbb{R}^3$ as a union of circles with radius 1, where none of the circles intersect each other.

13. Prove that every function $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is the sum of two injective functions.

14. Prove that there exists a function $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ such that the image of every interval $(a,b) \subset \mathbb{R}$ is $\mathbb{R}$.

15. Prove that there exists a set $A \subset \mathbb{R}$ such that every $x \in \mathbb{R}$ has a unique representation $x = a + b$ with $a < b$ and $a, b \in A$.

16. Prove that there existss a set $A \subset \mathbb{R}^2$ with the following property: For every positive real number x there exits a unique segment PQ of length x whose endpoints P and Q lie in A.

17. Suppose that every line $\ell \subset \mathbb{R}^2$ is labelled with some cardinal number k_ℓ with $2 \leq k_\ell \leq c$. Prove that there exists a set A such that for every line ℓ we have $|A \cap \ell = k_\ell|$.

18. (**) Find two totally ordered sets such that neither is isomorphic to a subset of the other.

(Note: Two sets M and N each with an order $<$ are called isomorphic if there is a bijective map $f : M \to N$ such that for every x, y in M with $x < y$ we have $f(x) < f(y)$, that is the isomorphism preserve the order.)

19. (**) Let X be a totally ordered set such that the only order-preserving injection from X to itself is the identity. Must X by finite?

5.2 Ordinals

Definition. A well-order on a set X is a relation $\preceq$ that satisfy the following properties, for each a, b, c in X:

Reflexive	$a \preceq a$
Transitive	If $a \preceq b$ and $b \preceq c$ then $a \preceq c$
Antisymmetric	If $a \preceq b$ and $b \preceq a$ then $a = b$
Total	Either $a \preceq b$ or $b \preceq a$

Definition. A set α is an *ordinal number* if the following conditions hold:

- If $\beta \in \alpha$ then $\beta \subset \alpha$.
- The relation $\in$ is a well-order on the elements on α.

1. (*) Show that $\in$ is a well-order on the set S of ordinals. Show that the union of all elements in S is an ordinal. (Difficult: Is S itself an ordinal?)

2. (*) Show that this definition of ordinals, is equivalent to the transfinite definition.

Definition. We define addition, multiplication and exponentiation of ordinals using (transfinite) induction.

3. Give an example of ordinals α and β with $\omega < \alpha < \beta$ such that $\alpha^\omega = \beta^\omega$.

4. Does there exist ordinals $\alpha < \beta$ such that $\alpha^\omega > \beta^\omega$?

5. Let α and β be ordinals with $\alpha > \beta$. Show that there is a unique ordinal γ such that $\beta + \gamma = \alpha$. Must there exist an ordinal γ with $\gamma + \beta = \alpha$?

6. Prove that there is an ordinal $\alpha > 1$ such that $\omega^\alpha = \alpha$. We will denote the least such ordinal by ε_0.

7. For each of the following sets M, find a subset S of $\mathbb{R}$ and a bijective map $f : S \to M$ such that for any $a < b$ in $\mathbb{R}$ we have $f(a) < f(b)$.

- $S = \omega + \omega$
- $S = \omega^2$
- $S = \omega^3$

8. An ordinal written as $\omega^{\alpha_1} n_1 + \omega^{\alpha_2} n_2 + \ldots + \omega^{\alpha_k} n_k$ where $\alpha_1 > \alpha_2 > \ldots > \alpha_k$ are ordinals, and k and $n_1, n_2, \ldots, n_k$ are non-zero natural numbers, is said to be in *Cantor Normal Form*. Show that every non-zero ordinal has a unique Cantor Normal Form. What is the Cantor Normal Form for the ordinal ε_0?

9. Who will win the nim-game with piles of size $\omega + 1, \omega^2, 1$?

10. Show that the first player wins the nim-game with piles of size ω, a, b for any choice of $a, b \in \mathbb{N}$.

5.3 Groups and Games with Great Numbers

Definition. A **monoid** is a set M with an operation $\star$, such that for any a, b in M we have a well-defined element $a \star b$ in M. Furthermore there is an identity-element 1 and a monoid satisfies the following relations for any $a, b, c \in M$.

(i) $(a \star b) \star c = a \star (b \star c)$

(ii) $1 \star a = a \star 1 = a$

A **group** is a monoid such that every element a in M has an inverse a^{-1} such that

(iii) $a \star a^{-1} = a^{-1} \star a = 1$

Definition. An **equivalence relation** $\sim$ on a set S is a relation between some pairs of elements in S that satisfies the following axioms for any $a, b, c \in S$:

(i) $a \sim a$

(ii) $a \sim b \Longrightarrow b \sim a$

(iii) If $(a \sim b$ and $b \sim c)$ then $c \sim a$.

Definition. An **ordinal** is a set α such that for every $\beta \in \alpha$ we have $\beta \subset \alpha$. We write $0 = \emptyset$ and $\alpha + 1 = \alpha \cap \{\alpha\}$. Furthermore $\in$ is a well-ordering of the set of all ordinals.

1. Hands on[2]
Who has a winning strategy in the nim-game with piles of size $\omega^2, \omega + 1, 1$?

2. The group of all ordinals
For any ordinals α, β we want to show that there is a unique ordinal γ such that such that first player loses the nim-game with piles of size α, β, γ. We write $\gamma = XOR(\alpha, \beta)$.
a) Show that if $XOR(\alpha, \beta)$ exists, then it is unique.
b)[3] Show that $XOR(\alpha, \beta)$ exists.
c) Show that this defines a group on the set of ordinals.

3. Groups of games The set of symmetric 2-player games[4] is a monoid under the following operation. If we have two games g_1, g_2 we form a new game $g_1 \star g_2$ where the player whose turn it is, chooses one of the two games and makes a move in this game. The player who then can not make a move will be the looser.

a) Show that the set of games where player one looses is a submonoid F of G.

b) Let $a \sim b$ if player one looses the game $a \star b$. Show that $\sim$ is an equivalence relation.

c) Let N denote the set of classes of equivalent games. Show that N is a group. In particular you have to show.

   i) If $a \sim a'$ and $b \sim b'$ then $a \star b \sim a' \star b'$.

   ii) The set of games where player one looses is an equivalence class $1 \in N$. This equivalence class is the identity, that is $1 \star a = a \star 1 = a$ for any $a \in N$.

   iii) All $a \in N$ has an inverse element a^{-1} such that $a \star a^{-1} = a^{-1} \star a = 1$.

[2] If you have limited time, you can skip this problem.
[3] This is difficult so you may skip and assume this without proof.
[4] With no randomness, with no secret information, that will terminate sooner or later. By symmetric we mean in all regard except for whose turn it would be. Examples could be Nim, the chocolate game, or other such games more often seen doing olympiads than actually played.

d) Show any game $a \in G$ is equivalent to some nim-game with a single pile of size α for some ordinal number α. Show that N is isomorphic to the group of all ordinals under the XOR sum.

6. Statistik

6.1 Slump och väntevärden

1. På en auktion säljs innehållet av Vilgots låda. Före auktionen singlade auktionsförättaren slant 200 gånger, och varje gång hon singlade krona lade hon en krona i lådan. För klave hände ingenting. Hur mycket pengar förväntar vi oss att Vilgots mamma i snitt kommer gå plus per auktionsrunda om hon budar 50 kr (och vinner lådan) ett stort antal gånger?

Definition. En **slumpvariabel** X är en funktion som antar ett värde som påverkas av slumpen. En slumpvariabel kan vara både diskret och kontinuerlig.

Definition. **Väntevärde (diskret).** E:et kommer från engelskans *"expected value"*. $P(x)$ är sannolikheten att slumpvariabeln X antar värdet x.

$$\mu = E(X) = \sum_{\text{möjliga } x} xP(x)$$

Detta kan ses som ett slags generaliserat medelvärde som viktar efter sannolikhet. När antalet försök växer konvergerar medelvärdet mot väntevärdet.

2. En viktad 4-sidig tärning har följande värden och sannolikheter att slå dem:

$$1:1/4 \qquad 2:1/8 \qquad 3:1/8 \qquad 4:1/2$$

Bestäm väntevärdet för ett tärningsslag.

3. Låt $X : \{$ klave, krona $\} \to \{0,1\}$. Vad är $E(X)$? Vad är väntevärdet av tre kast? Fundera generellt hur $E(aX+bY)$ beter sig, där X,Y är slumpvariabler och a,b är konstanter.

4. Hur skiljer sig $E(X)^2$ från $E(X^2)$? Testa med exempel. Vad gäller för $E(X\cdot Y)$ där X,Y är slumpvariabler.

Definition. En slumpvariabels **täthetsfunktion** ger en bild av hur sannolika olika utfall är relativt varandra. Summan av sannolikheterna ska alltid bli ett.

5. Skissa täthetsfunktionen och bestäm väntevärdet för:

(a) en vanlig sexsidig tärning (d6), fast värdet är antalet prickar x2.

(b) summan av prickarna på två d6.

(c) en falsk d6 med dubbelt så stor sannolikhet att slå 6 som att slå något av de andra talen (enskilt)

(d) sannolikheten att gissa *exakt* samma värde som en uniform slumptalsgenerator på intervallet $[0,2]$.

6. Låt slumpvariabeln X vara antalet myntkast som krävs innan man singlar klave.

(a) Beskriv täthetsfunktionen f för X.

(b) Nyttja X för att bestämma

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{a^j}$$

för $a \in \mathbb{R}$. *Ledning: Betrakta ett viktat mynt.*

7. Valentina har precis fått en cool fraktal-kortlek. Hon utmanar Benjamin att gissa vilket kort hon tänker på. Först får Benjamin 52 gissningar. Valentina tyckte att det gick för bra för Benjamin, så hon lade till en annan, fraktallös, kortlek och sa att han nu fick gissa 104 gånger (bland 104 unika kort). Hur kommer spelet sluta nu?

8. Vad är väntevärdet av antalet myntkast som krävs för att singla en krona och sedan en klave?

9. Vad är väntevärdet av antalet myntkast som krävs för att singla två kronor i rad?

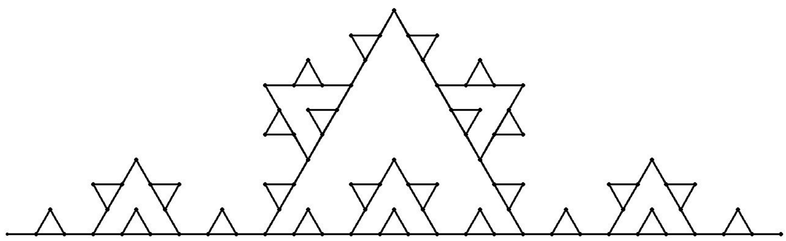
10. Givet en sträcka som slumpmässigt delas in i tre delar, vad är sannolikheten att sidorna kan bilda en triangel?

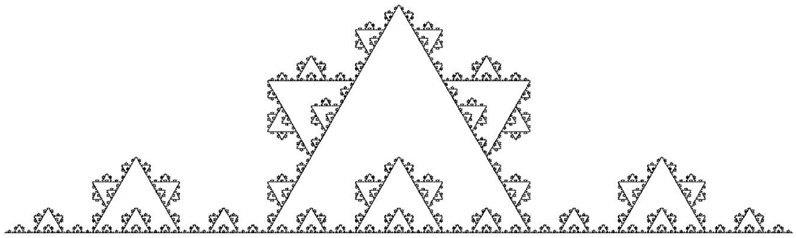
11. Vad är väntevärdet av avståndet från en slumpmässig punkt på den modifierade Koch-kurvan till

(a) den vänstraste noden;

(b) den närmaste av två kantnoder?

Avstånd räknas som väg längs kurvan. Låt längden av botten av kurvan vara ett.





Figur 6.1: Den modifierade Koch-kurvan bildas genom att sätta ihop 5 exakta kopior av sig själv. Den övre bilden illustrerar djup 3.

6.2 Varians

Definition. **Varians** är ett mått på en slumpvariabel X avvikelse från medelvärdet μ och beskriver på något sätt spridningen av variabelns fördelning. Variansen definieras som:

$$V(X) = E((X-\mu)^2)$$

Standardavvikelsen $\sigma(X)$ är roten ur variansen $\sqrt{V(X)}$.

1. Du ser någon spela några olika slumpspel på casino som du antar har likformig fördelning och observerar deras prestation (vinst minus insats i kronor). Vilket spel skulle du helst vilja spela en gång?

(a) $\{-1, 1, 3\}$ **(b)** $\{10, 10, 10\}$ **(c)** $\{-100, 101, 302\}$

2. Visa att

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

det vill säga medelvärdet av kvadraten minus kvadraten av medelvärdet.

Definition. **Kovariansen** mellan två slumpvariabler X, Y definieras som

$$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

Om kovariansen är noll så kan man betrakta X och Y som **oberoende**. Vidare är $Cov(X,X) = V(X)$.

3. Hur förändras variansen av en slumpvariabel om variabelns värde konstant ökas med 10?

4. Hur förändras variansen om slumpvariabelns värde skalas upp med en faktor 10?

Definition. En **estimator** för en fördelningsparameter θ är en funktion g av ett stickprov $x_1, x_2, ..., x_n$ för att uppskatta en parameter θ:

$$\hat{\theta} = g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

Exempelvis används medelvärdet:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

för att uppskatta μ för exempelvis normalfördelningen.

5. Vi vill gärna att en estimator är så kallat *väntevärdesriktig*, det vill säga att skattningen T har väntevärde lika med den sanna parametern, dvs. $E(T) = \theta$. Är följande estimatorer väntevärdesriktiga?

(a) $\hat{\mu}_1 = \dfrac{x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4}{8}$

(b) $\hat{\mu}_2 = \dfrac{2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4}{8}$

6. Vidare vill vi att en estimator ska vara så *effektiv* som möjligt. Om vi gör fler och fler observationer vill vi att variansen ska gå mot noll. Hur snabbt variansen minskar är ett mått på estimatorns *effektivitet*.

(a) $\hat{\mu}_1 = \dfrac{x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4}{8}$

(b) $\hat{\mu}_2 = \dfrac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4}$

Extra: Är någon av estimatorerna ovan alltid bäst?

6.3 Hitta parametern

Ni får tillgång till dataset och en mall med Pythonkod. Mallen innehåller kod som läser in datan från textfilen till en lista som ni sedan kan arbeta med. Datan är en mängd observationer av en slumpvariabel X som kan beskrivas med fördelningen

$$f(x) = 1 + ax^2$$

1. Bestäm så bra som möjligt fördelningsparametern a med hjälp av ditt dataset.

2. Om du bilr klar, be Benjamin om en datagenerator till fördelningen ovan och analysera din estimators väntevärdesriktighet (bias) samt om den är konsistent (consistency).

3. Modifiera generatorn och skapa ett eget dataset utifrån din valda fördelning. Se hur din estimtor beter sig för olika fördelningsfunktioner.

7. Aritmetisk kombinatorik

7.1 Kombinatorik och delbarhet

1. Ett nummer från 000000 till 999999 kallas för *turnummer* om summan av de tre första siffrorna är lika med summan av de tre sista. Visa att

(a) antalet turnummer är jämnt.

(b) summan av alla turnummer är delbar med 999.

2. Visa (genom att använda binomialkoefficienter) att

(a) produkten av fyra på varandra följande heltal är jämnt delbart med 24.

(b) produkten av N på varandra följande heltal är jämnt delbart med $N!$.

3. Visa att

(a) antalet sätt att dela in en kvadrat i dominobrickor är delbart med 2.

(b) antalet sätt att dela in en kub i rätblock av formatet $1\times1\times2$ är delbart med 3.

4. (**Halsband och Fermats lilla sats.**) Det finns glaspärlor av k färger, ett obegränsat antal av varje. Vi vill sätta ihop pärlhalsband med p pärlor i varje, där p är ett förutbestämt primtal. Trådarna som man trär pärlorna på är riktade. Pärlbanden får vara raka (band) och cirkulära (halsband). Om man klipper ett halsband på något ställe får man ett band.

(a) Bestäm antalet olika band.

(b) Visa att om man tar ett halsband som innehåller minst två olika färger och skär det på något ställe blir det ett annorlunda band än om man hade skurit på något annat ställe.

(c) Bestäm antalet halsband där det finns pärlor av minst två olika färger.

(d) (Fermats lilla sats.) Visa att $k^p - k$ är jämnt delbart med p.

5. Visa att

(a) $n \cdot \binom{2n}{n}$ är delbart med $n+1$.

(b) Talet $K_n = \dfrac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ är ett heltal.

Definition. En rad med $2n$ parenteser varav hälften är vänster- och hälften är högerparenteser kallas för en *korrekt parentessättning* om det finns minst lika många vänster- som höger parenteser i varje möjlig vänsterhalva av raden. Parentessättningar som inte är korrekta kallas *felaktiga*.

Exempel. (())() är en korrekt parentessättning, ())(() är en felaktig parentessättning.

6. **(a)** Visa att antalet felaktiga parentessättningar med n parentespar är $\binom{2n}{n+1}$.

(b) Visa att antalet korrekta parentessättningar med n parentespar är K_n.

7. Vi säger att en kortlek med 52 ligger på *rätt* sätt om två kort som ligger intill varandra antingen har samma färg (utav fyra) eller samma valör, samma sak gäller för korten som ligger längst upp och längst ner samt att spader ess ligger längst upp. Visa att antalet sätt att lägga kortleken rätt är

(a) delbart med 12!.

(b) delbart med 13!.

7.2 Fibonacctitalen

Definition. *Fibonacctitalen* är elementen i *Fibonaccitalföljden* som definieras rekursivt: $F_1 = F_2 = 1, F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$.

1. Visa att svaren på frågorna resulterar i Fibonaccitalföljden:

(a) Fibonacci skaffade sig ett par kaniner. Kaninerna är av en sort där ett kaninpar varje månad får två kaninbarn och dessa barn får nya kaninbarn redan två månader efter födseln. Hur många par kaniner kommer Fibonacci ha efter n månader?

(b) På hur många sätt kan man täcka över ett $2 \times n$-bräde med dominobrickor?

(c) Bestäm antalet ord av längden n som består av bokstäverna A och B så att två B:n aldrig kommer direkt efter varandra.

2. Bevisa några egenskaper som Fibonaccitalen har:

(a) $F_1 + F_2 + F_3 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1$.

(b) $F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + \ldots + F_n^2 = F_n F_{n+1}$.

(c) Visa med induktion på m att $F_{n+m} = F_{n-1} F_m + F_n F_{m+1}$.

(d) Vad är summan $F_1 - F_2 + F_3 - \ldots (-1)^{n+1} F_n$ lika med?

(**Ledning:** Bestäm summan av Fibonaccitalen med jämna nummer.)

3. **(a)** Visa att två intilliggande Fibonaccital är relativt prima.

(b) Visa att sgd(F_n, F_k) =sgd(F_{n-k}, F_k) för $n > k$.

(c) Visa att sgd$(F_n, F_k) = F_{\text{sgd}(n,k)}$.

(d) Visa att F_n är delbart med F_k om och endast om n är delbart med k eller $k \leq 2$.

4. Visa Binets formel: $F_n = \dfrac{a_1^n - a_2^n}{\sqrt{5}}$, där $a_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, $a_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

5. Visa att för varje positivt heltal m så finns det ett Fibonaccital som är delbart med m.

6. Visa att summan av fem på varandra följande Fibonaccital inte är ett Fibonaccital.

7. Visa att produkten av n på varandra följande Fibonaccital är delbar med produkten av de n första Fibonaccitalen.

8. Det finns 12 sträckor som alla har positiva heltalslängder som är mindre än 140. Visa att det finns tre sträckor som kan byggas ihop till en triangel.

9. Vi definierar två talföljder:

$A_n : A_1 = 0$, och varje påföljande term får man genom att ersätta varje 0:a med 1 och varje 1:a med 10.

$B_n : B_1 = 0, B_2 = 1$, varje följande term får man genom att skriva den förra termen till vänster om den förrförra.

(a) Bestäm antalet siffror i det n:te talet i varje talföljd.

(b) Bestäm antalet nollor och antalet ettor i det n:te talet i varje talföljd.

(c) Visa att talföljderna sammanfaller.

10. Visa att det finns oändligt många Fibonaccital som är delbara med sitt eget nummer.

7.3 Catalantalen

Visa att följande tal är lika med varandra genom att konstruera bijektioner mellan de motsvarande mängderna. Ibland kommer det vara klart varför det är en bijektion, ibland får man konstruera två injektioner: en från första till andra mängden och en från andra till första.

1. Antalet korrekt satta följder med $2n$ parenteser, det vill säga där det finns n vänsterparenteser och n högerparenteser så att för varje prefix av följden så finns minst så många vänsterparenteser som högerparenteser.

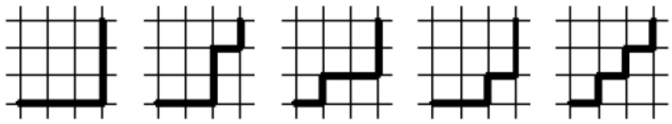
((()))   (())()   ()(())   (()())   ()()()

Det talet kallas för *Catalantal nummer n*.

2. Antalet talföljder $a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$, där talen ″1″ och ″-1″ förekommer n gånger var, och för varje $k \in \{1, \ldots, 2n\}$ så gäller olikheten $a_1 + a_2 + \ldots + a_k \geq 0$.

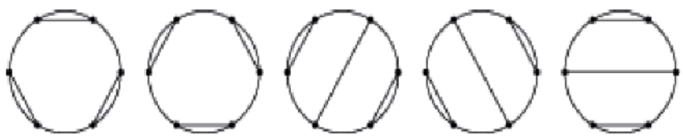
$$+1+1+1-1-1-1 \qquad +1+1-1-1+1-1 \qquad +1-1+1+1-1-1$$
$$+1+1-1+1-1-1 \qquad +1-1+1-1+1-1$$

3. Antalet vägar från punkten $(0,0)$ till punkten (n,n) som går längst med rutornas gränser i riktningarna uppåt och höger som inte går över linjen $y = x$.



4. Antalet sätt att dela upp $2n$ punkter på en sträcka i par med hjälp av halvcirklar som ligger ovanför sträckan och inte skär varandra.

5. Antalet sätt att dela upp $2n$ punkter på en cirkel i par genom att förbinda punktparen med kordor som inte skär varandra.



6. Antalet sätt att ställa $2n$ människor av olika längd på två rader så att människorna står i avtagande längd inom varje rad samt att varje människa i den första raden är längre än den som står direkt bakom i den andra raden.

7. Antalet sätt att sätta parenteser för att bestämma prioriteringsordningen i en multiplikation med $n+1$ variabler.

(ab)(cd) **a(b(cd))** **a((bc)d)** **((ab)c)d** **(a(bc))d**

8. Antalet binära träd med $n+1$ löv.

Ett träd kallas för *binärt* om det har en utmärkt nod (roten) med grad 2 och där alla andra noder har grad 1 eller 3. Varje icke-löv har alltså graden 3. Träden som skiljer sig genom att man byter plats på två grenar som går ner från en viss nod räknas som olika.

(Ibland ansluter man en ny nod ovanifrån till roten och kallar den nya noden för roten istället.)

9. Antalet sätt att dela upp en konvex $(n+2)$-hörning i trianglar med diagonaler som inte skär varandra.

10. Antalet sätt att skriva en summa med $n+1$ termer med omvänd polsk notation utan att byta plats på ordningen på variablerna.

abcd+++ abc++d+ ab+cd++ abc+d++ ab+c+d+

Omvänd polsk notation? Vi tittar på ett aritmetiskt uttryck utan unära minustecken, till exempel $(a+b)(c-d)$. Det kan skrivas utan parenteser på det här sättet: $ab+cd-*$. (Andra exempel: $a+b+c \to ab+c+$, $a+bc \to bc*a+$ där $*$ står för multiplikation).

Detta skrivsätt kallas för den *omvända polska notationen* av uttrycket. Det definieras rekursivt: man väljer en operation som ska utföras sist, dess tecken skriv sist i raden. Innan det skrivs omvända polska notationer av operanderna. Omvända polska notationen av en variabel är variabeln själv. På samma sätt definieras den omvända polska notationen där det aritmetiska tecknet istället skrivs först.

11. Antalet rotade träd (träd med en utmärkt nod) som innehåller $n+1$ noder. (Träd som man får från varandra genom att byta plats på grenar räknas som olika.)

8. Kombinatorik IV (Extra)

10 augusti

Definition. Men en *väg* menar vi idag en väg på ett rutat koordinatsystem som startar i punkten $(0,0)$, består av $2n$ sträckor som går diagonalt genom rutor, antingen uppåt-höger eller nedåt-höger). Man kan säga att vägen är en diskret slumpvandring, att man varje sekund väljer om man ska gå upp eller ner.

12. Med C_n betecknar vi antalet vägar som slutar i punkten $(2n, 0)$ och som inte går under x-axeln. Visa att $C_{n+1} = C_0C_n + C_1C_{n-1} + \cdots + C_nC_0$.

13. (*Reflektionsprincipen*) Visa att antalet vägar som slutar i punkten $(2n, -2)$ är lika med antalet vägar som slutar i punkten $(2n, 0)$ och som har punkter i det undre halvplanet.

14. Visa att $C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1} = \dfrac{\binom{2n}{n}}{n+1}$.

15. Visa att antalet vägar som inte skär x-axeln (förutom i startpunkten) är lika med antalet vägar som inte har några punkter i det undre halvplanet och är lika med antalet vägar som slutar i punkten $(2n, 0)$.

16. **(a)** Med A_k betecknar vi antalet vägar som skär (åtminstone i en punkt) linjen $y = k$, med B_k antalet vägar som slutar som lägst på linjen $y = k$, med C_k antalet vägar som slutar på linjen $y = k$. Visa att $A_k = 2B_k - C_k$.

(b) Visa att antalet vägar vars maximum är $y = k$, är lika många som antalet vägar som slutar i punkten $(2n, k)$ eller $(2n, k+1)$.

17. **(a)** Ett fyllo står på kanten av ett stup. Han gör ett steg mot stupet med sannolikheten $p < 1/2$ och bort från kanten med sannolikheten $1 - p$. Vad är sannolikheten för att han kommer vara på kanten av stupet igen om $2n$ utan att ha fallit ner?

(b) (*Genererande funktionen för Catalantal*) Vad är sannolikheten för att han någon gång kommer falla ner?

Ledning: Vad är sannolikheten att han ramlar ner i $(0, 0)$? I $(0, 2)$? I $(0, 4)$? Du får en oändlig summa som vi kan beteckna med $G(z)$. Ställ upp $G(z) \cdot G(z)$ och uttryck det som $kG(z) + m$. Räkna ut $G(z)$ genom att lösa andragradaren. Kolla gränsvärdet av funktionen då $z- > 0$ för att veta vilket tecken du ska välja.

18. Ett fyllo går ut från en bar och börjar slumpvandra: han går åt vänster med sannolikheten p och åt höger med sannolikheten $1 - p$. Om han återigen befinner sig vid baren så kommer ha gå in och fortsätta dricka. Bestäm sannolikheten för att det kommer hända.

8.1 Kombinatorik IV (Extra)

> **Definition.** Men en *väg* menar vi idag en väg på ett rutat koordinatsystem som startar i punkten $(0,0)$, består av $2n$ sträckor som går diagonalt genom rutor, antingen uppåt-höger eller nedåt-höger). Man kan säga att vägen är en diskret slumpvandring, att man varje sekund väljer om man ska gå upp eller ner.

1. Med C_n betecknar vi antalet vägar som slutar i punkten $(2n,0)$ och som inte går under x-axeln. Visa att $C_{n+1} = C_0C_n + C_1C_{n-1} + \cdots + C_nC_0$.

2. (*Reflektionsprincipen*) Visa att antalet vägar som slutar i punkten $(2n,-2)$ är lika med antalet vägar som slutar i punkten $(2n,0)$ och som har punkter i det undre halvplanet.

3. Visa att $C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1} = \dfrac{\binom{2n}{n}}{n+1}$.

4. Visa att antalet vägar som inte skär x-axeln (förutom i startpunkten) är lika med antalet vägar som inte har några punkter i det undre halvplanet och är lika med antalet vägar som slutar i punkten $(2n,0)$.

5. **(a)** Med A_k betecknar vi antalet vägar som skär (åtminstone i en punkt) linjen $y = k$, med B_k antalet vägar som slutar som lägst på linjen $y = k$, med C_k antalet vägar som slutar på linjen $y = k$. Visa att $A_k = 2B_k - C_k$.

(b) Visa att antalet vägar vars maximum är $y = k$, är lika många som antalet vägar som slutar i punkten $(2n,k)$ eller $(2n,k+1)$.

6. **(a)** Ett fyllo står på kanten av ett stup. Han gör ett steg mot stupet med sannolikheten $p < 1/2$ och bort från kanten med sannolikheten $1-p$. Vad är sannolikheten för att han kommer vara på kanten av stupet igen om $2n$ utan att ha fallit ner?

(b) (*Genererande funktionen för Catalantal*) Vad är sannolikheten för att han någon gång kommer falla ner?

Ledning: Vad är sannolikheten att han ramlar ner i $(0,0)$? I $(0,2)$? I $(0,4)$? Du får en oändlig summa som vi kan beteckna med $G(z)$. Ställ upp $G(z)\cdot G(z)$ och uttryck det som $kG(z)+m$. Räkna ut $G(z)$ genom att lösa andragradaren. Kolla gränsvärdet av funktionen då $z->0$ för att veta vilket tecken du ska välja.

7. Ett fyllo går ut från en bar och börjar slumpvandra: han går åt vänster med sannolikheten p och åt höger med sannolikheten $1-p$. Om han återigen befinner sig vid baren så kommer ha gå in och fortsätta dricka. Bestäm sannolikheten för att det kommer hända.

9. Linear Algebra and Combinatorics

9.1 Linear Algebra and Combinatorics

1. 24 students did a test with 25 problems. The teacher has a 24×25 table that marks who solved which problems. Every problem was solved by at least one student. It turned out that at least one student solved each problem. Valentina is in an *even* mood. Show that she can make some of the problems worth 0 point, and some of the problems worth 0 points such that every student received an even (possibly 0) number of points.

Definition. Vectors $v_1, v_2, \ldots, v_n$ are linearly independent if

$$\lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda v_n = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$$

We say that $\lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 + \ldots + \lambda_n \cdot v_n$ is a linear combination of $v_1, v_2, \ldots, v_n$.

2. Show that the 3 vectors

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

are linearly independent over $\mathbb{Z}_3$ but not over $\mathbb{Z}_2$.

■ **Exempel 1** There are n participants in Mattekollo and Valentina is trying to divide them into teams with an odd number of participants in each team. For any two teams, there is an even number of participants who are on both teams. What is the maximal number of teams that Valentina can make? ■

3. The participants at Mattekollo go for ice cream in groups. After $k > 1$ groups have gone, every two students have gone together exactly once. Prove that the number of students in the school is at most k.

4. The qualification test for Mattekollo 2020 had n questions and was taken by m children. Each question was worth a certain (positive) number of points, and no partial credits were given. After all the papers had been graded, Alex noticed that by reassigning the scores of the questions, any desired ranking of the contestants could be achieved. Given n, what is the largest possible value of m?
(All-Russian Olympiad, 2001)

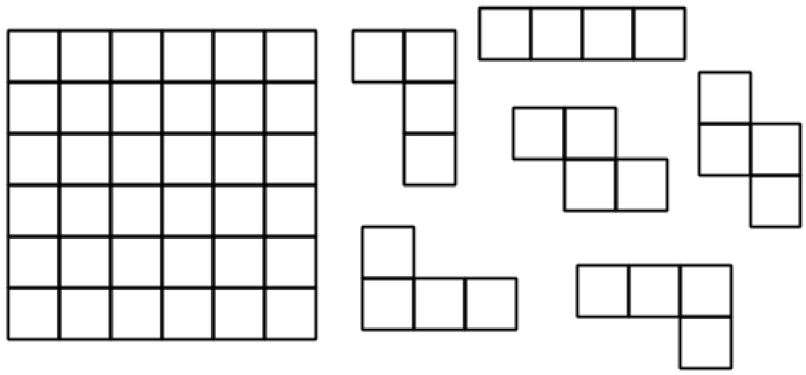
5. There are n participants in Mattekollo and Valentina is trying to divide them into teams with an even number of participants in each team. For any two teams, there is an even number of participants who are on both teams. What is the maximal number of teams that Valentina can make?

6. Let m be the maximal number of (different) points in $\mathbb{R}^n$ such that the pairwise distances assume at most two values.
a) Show that $a \geq \binom{n}{2}$
b) Show that $m \leq 2n^2 + 2n + 1$
c) Can you give any better bounds?

10. Mattedrabbningar

10.1 Mattedrabbning normal

1. Går det att dela upp ett 6x6-bräde i figurer av de sex stycken tetrisformer som på bilden om dessa varken får roteras eller speglas?



2. I centrum av en kvadrat sitter en groda. Georg spelar ett enmansspel där han i varje drag väljer en rät linje som går genom grodans placering varefter han klappar. Grodan hoppar då en meter längs linjen åt någon riktning. Är det alltid möjligt för Georg att i ett ändligt antal drag garanterat få ut grodan ur kvadraten?

3. En rover (strövare) utforskar ytan av en bollformad planet med en ekvator med längd 400 km. Planeten betraktas som fullkomligt utforskad om rovern har varit högst 50 km från varje punkt på ytan och återvänt till basen (startpunkten). Kan rovern helt utforska planeten genom att köra en sträcka på högst 600 km?

4. En liksidig triangel ABC med höjden av längden h är given. I triangelns plan sätter man ut punkten M. Avståndet från M till linjerna AB och AC är lika med b respektive c. Bestäm avståndet från punkten M till linjen BC för alla möjliga lägen på M.

5. Framför Alex ligger 100 stängda boxar med en röd eller en blå kula i vardera box. Alex har en krona på sitt konto. Han kommer fram till en box, gissar på kulans färg och satsar en viss summa pengar på sin gissning (det får vara ett godtyckligt positivt reellt tal eller 0, fast högst så mycket som han har på kontot). Boxen öppnas och summan på kontot höjs (om han gissat rätt) eller minskas (om han gissat fel) med den summan som Alex satsat. Spelet fortsätter tills alla boxar blir öppnade. Bestäm den största summan som Alex med säkerhet kan få på sitt konto om han vet att det finns exakt n stycken blåa kulor i boxarna.
(Förtydligande: Satsar Alex 0 så öppnas boxen i alla fall.)

6. 26 positiva heltal står i en ring. Varje tal ersatte man sedan med antalet grannar som var lika med talet (0, 1 eller 2). Därefter gjorde man samma operation igen. Visa att summan av alla talen i ringen blev delbar med fyra.

10.2 Mattedrabbning svår

1. I centrum av en kvadrat sitter en groda. Georg spelar ett enmansspel där han i varje drag väljer en rät linje som går genom grodans placering varefter han klappar. Grodan hoppar då en meter längs linjen åt någon riktning. Är det alltid möjligt för Georg att i ett ändligt antal drag garanterat få ut grodan ur kvadraten?

2. Är det möjligt att fylla planet med parabler, sådana att inga två parabler är likadana (två parabler ses som lika om en kan skapas av en annan via rotation och/eller translation)? Det krävs att varje punkt på planet tillhör exakt en parabel.

3. Snorlax väljer en funktionsekvation[1] E vilken är en ändlig icketom sträng formad från en mängd $x_1, x_2, \ldots$ med variabler och tillämpning av en funktion f, samt addition, subtraktion, multiplikation (men inte divistion), samt fixa reela konstanter. Han betraktar ekvationen $E = 0$ och låter S vara en mängd funktioner $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sådana att ekvationen håller för alla val av realla tal $x_1, \ldots, x_k$. (Till exempel: om Snorlax väljer funktionsekvationen

$$f(2f(x_1)+x_2)-2f(x_1)-x_2=0$$

så består S av en funktion: identitetsfunktionen.)

Låt X vara mängden funktioner med domän $\mathbb{R}$ och avbildning exakt $\mathbb{Z}$. Visa att Snorlax kan välja sin funktionsekvation sådan att S är icke-tom men $S \subseteq X$.

4. Carl ges tre distinkta icke-parallella linjer ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 och en cirkel ω i planet. Förutom en vanlig linjal så har Carl en speciell linjal som given en linje ℓ och en punkt P konstruerar en ny linje genom P parallell med ℓ. (Carl har ingen passare.) Visa att Carl kan konstruera en triangel med omskriven cirkel ω vars sidor är parallella med ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3, i någon ordning.

5. En miljon cirklar i planet är givna. Alla passerar en punkt P. Visa att cirklarna kan delas upp i 12 grupper sådana att ingen cirkel passerar centrum av en annan cirkel i samma grupp.

6. En rover (strövare) utforskar ytan av en bollformad planet med en ekvator med längd 400 km. Planeten betraktas som fullkomligt utforskad om rovern har varit högst 50 km från varje punkt på ytan och återvänt till basen (startpunkten). Kan rovern helt utforska planeten genom att köra en sträcka på högst 600 km?

---

[1] *Eng: functional expression. "These can be defined formally in the following way: the set of functional expressions is the minimal one (by inclusion) such that (i) any fixed real constant is a functional expression, (ii) for any integer i, the variable x_i is a functional expression, and (iii) if V and W are functional expressions, then so are $f(V)$, $V+W$, $V-W$, and $V \cdot W$"*

II Lektionsmaterial programmering

1. Introduktion till Python: Uppgifter

1.1 Grund

Idag har vi en introduktion till Python för alla som är nya till språket eller behöver repetition, men har uppgifter på olika nivåer! Kör hårt och lycka till!

Lägga ihop två tal

I denna uppgift ska du skriva ett program som tar in två heltal och skriver ut summan av dem. Till din hjälp har du följande kod som visar hur du kan läsa in två tal.

```
line = input()
a, b = line.split()
a = int(a)
b = int(b)
```

Indata:

3 4

Förväntad utdata:

7

If-satser

Skriv följande program i din python-fil. Byt ut ? mot valfritt tal. Testa olika tal och se vad programmet gör

```
x = 8
y = ?
if x<y:
    print("x är mindre än y")
elif x>y:
    print("x är större än y")
else:
   print("x är lika med y")
```

Skriv om programmet ovanför till

```
x = 7
y = 3
if x ? y:
    print("Hurra!")
else:
   print("Detta gick inte")
```

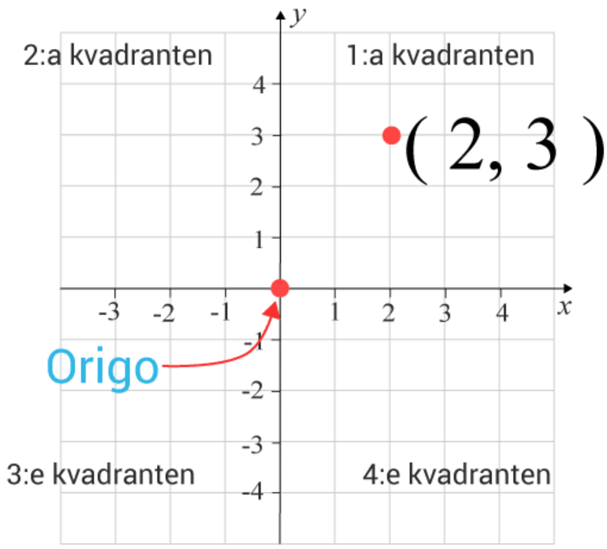
Byt ut frågetecknet med något av tecknen ==, !=, >, >=, <, <=. Fundera först över uppgift a) och b), kör därefter programmet med de olika tecknen ovanför och se om du tänkt rätt.

a) För vilka av dessa tecken kan du byta ut frågetecknet för att programmet ska skriva ut ”Hurra”?

b) För vilka av dessa tecken kan du byta ut frågetecknet för att programmet ska skriva ut ”Detta gick inte”?

Kvadranter

Skriv ett program som tar in en x- och y-koordinat och skriver ut i vilkenkvadrant den punkten ligger i. Varken x eller y kommer att vara 0.



Koordinatsystem

Intervall

Skriv olika funktioner som känner igen olika intervall med hjälp av if-satser.

a) Läs in våglängd och ge färg.

b) Läs in frekvens och ge ton.

Ni kan använda Wikipedias sidor för att kolla färgernas intervall i *nm* och tonernas namn i *Hz*.

Stränghantering med slices

Lite operationer med strängar, fundera först vad som händer, innan ni testar. Reflektera och fråga om nått är oklart.

a) x = ”Hello world”

b) x[7]

c) x[1:3]

d) x[-2]

e) x[1:]

f) x[:] # När vill man använda detta?

g) x[:1]

h) x[:-3]

i) x[-5:]

j) x*4

k) x+"!!"

Listor

Vi ska nu använda oss av listor. När vi skriver listor i Python använder vi hakparenteser, [, och skiljer de olika variablerna i listan genom att skriva ett kommatecken. Se exemplet nedanför.

```
frukter = ["Äpple", "Päron", "Banan"]
```

Vi kan därefter använda en for-loop på listan vi har skrivit och gå igenom varje element för sig. Ett exempel på detta är

```
frukter = ["Äpple", "Päron", "Banan"]
for frukt in frukter:
   print(frukt)
```

Som kommer skriva ut varje frukt för sig efter varandra (testa gärna detta innan ni går vidare). I python börjar numreringen av index (positioner) i listor på 0.

Skapa en lista med namn på minst 3 personer. Skriv ett program som skriver ut ”Hej” och därefter namnet på personen för varje person.

While

Vi använder ”while” när vi inte vet hur många gånger vi ska köra en loop. Ett exempel på detta är

```python
tal = input("Ange lösenkod: ")
korrekt = "1337"
while tal != korrekt:
   tal = input("Ange lösenkod: ")
print("Rätt kod! Nu är du i den hemliga delen av programmet!")
```

Där programmet stoppar när vi har skrivit in rätt lösenkod. Testa detta före du fortsätter.
Alla program som kan skrivas med en for-loop kan även skrivas med en while-loop, men inte omvänt.

Skriv ett program som frågar efter ditt namn och låt loopen köra så länge det är fel. När du skriver in rätt namn skriver programmet ut "korrekt".

While eller for?

Du ska göra en funktion som innehåller en for-loop och en annan funktion som innehåller while-loop. Låt funktionerna beräknade följande, och testa vilken som passar bäst.

a) Fakultet

b) Fibonacci

Uppgift: Namnlista

Du ska skapa en namnlista av obestämd längd. Ta hjälp av koden nedan och en while-loop. När man skriver in "end" ska koden skriva ut listan och programmet avslutas.

```python
namn = input("Skriv in ett namn: ") # Låter användaren skriva in ett värde (av
    typ string/text) och skriver det till variabeln namn.

namnlista = [] # Skapar en tom lista

namnlista.append(namn) # Lägger till ett element i slutet av listan, i det här
    fallet värdet av variabeln namn.
```

Dictionaries

Hur kan man komma åt Fredriks betyg i historia?

```
person = {
  "klass": {
    "student": {
      "namn": "Fredrik",
      "betyg": {
        "fysik": 'A',
        "historia": 'C',
        "religion": 'D'
      }
    }
  }
}
```

Funktioner

Om en uträkning ska göras flera gånger kan det vara effektivt att skriva en funktion som gör uträkningarna utan att skriva ut samma uttryck varje gång. Ett exempel på en funktion är

```
def dubbla(tal):
   return tal*2
print (dubbla(4))
print (dubbla(5))
```

Som är en funktion som fördubblar talet vi skickar in. I exemplet har vi först skickat in 4 och därefter 5. I terminalen får vi utskrivet 8 och 10 som är det dubbla av talen vi skickat in i funktionen.

1.2 Mellan

Omvandling

Vi vet att 1 tum = 2.54 cm och 1 fot = 12 tum. Det är vanligt att skriva ″ istället för tum och ′ istället för fot. 5′2″ är alltså 5 fot och 2 tum. Skapa en funktion som tar in en sträng med ovanstående format och skriver ut längden i cm.

Testa med till exempel följande indata:

a) 5"

b) 2′6"

c) 7′3"

d) 13′

e) Gör så användaren får välja om det ska konverteras från cm till tum och fot, eller från tum och fot till cm.

Uppgift: Funktioner utan return

Alla funktioner behöver inte ge tillbaka ett värde.

```
def greeting(namn):
   print("Hej ", namn)

greeting("Madde")
```

Skapa en liknande funktion som skriver ut summan av två tal så att resultatet blir ”Summan är: <resultat>”

Konvertera enheter

Vi ska nu skriva ett program som omvandlar tum och fot till cm. Vi vet att 1 tum = 2.54 cm och 1 fot = 12 tum. Det är vanligt att skriva ″ istället för tum och ′ istället för fot. 5′2″ är alltså 5 fot och 2 tum. Skapa en funktion som tar in en sträng med ovanstående format och skriver ut längden i cm. Testa med till exempel följande indata:

a) 5″

b) 2′11″

c) 17′10″

d) 13′

e) Gör så användaren får välja om det ska konverteras från cm till tum och fot, eller från tum och fot till cm.

Listor

Vad händer när man skriver följande? Hur ser a ut efter varje rad? Fundera innan ni skriver in det i terminalen. Ger någon rad error?

```
>>> a = [2,3]
>>> a[1] = 5
>>> a[1] = [3,4,5]
>>> a[2] = [7]
>>> a[2:] = [7]
>>> a[2:] = [7,8,9,10]
>>> a[2:] = [3,4]
>>> a[:-3] = [0]
```

Listbyggare

Använd listbyggare (list comprehensions) för att lösa följande uppgifter.

a) Skapa en lista med alla kvadrattal mellan 1 och 100.

b) Skapa en lista med alla tal mellan 1 och 100 som innehåller siffran 6.

c) Utgå från listan [”Björn”, ”Hund”, ”Katt”, ”Häst”]. Lägg till ett utropstecken till alla strängar och filtrera bort strängar som inte innehåller bokstaven ’n’.

d) Ta bort alla vokaler från en strän med hjälp av listbyggare.

e) Vad gör följande kod? Tänk efter innan ni testar koden.

```
[x for x in range(2,100) if not [y for y in range(2,x) if x % y == 0]]
```

Funkar koden bra på större tal (>10000)? Kan man göra en liten ändring så att koden blir lite snabbare för större tal?

Dictionary

Här har du en ordlista med svenska ord: `http://runeberg.org/words/ss100.txt`. Gå igenom den och skapa en dictionary med bokstäverna som key och deras antal som value. Vilket är den vanligaste bokstaven?

Tips för att läsa filen:

```
from urllib.request import urlopen
data = urlopen("http://runeberg.org/words/ss100.txt")
for line in data:
    print(line.decode("latin-1"))
```

Dictionary comprehensions / ordboksbyggare

a) Skrapa en dictionary vars nycklar är talen från 1 till 15 (båda inkluderas) och värdena är kvadraten av nycklarna. Testa först med en for-loop och sen med en ordboksbyggare.

b) Skapa en dictionary med alla orden i denna delfråga där orden är nyckeln och ordens längd är dess värden. Använd ordboksbyggare.

c) Använd nästlade list / dictionary comprehensions för att hitta största ensiffriga delaren för varje tal från 1 till 1000. Talen är nyckel och största ensiffriga delaren är värdet.

Rekursiva funktioner

Vi ska nu skriva rekursiva funktioner, dvs. funktioner som kallas sig själva. Man skulle kunna lösa dessa problem med loopar också, men gör inte det nu eftersom vi ska lära oss om rekursiva funktioner.

a) Skriv en ny funktion som du döper till "fakultet" med en parameter "värde". Om man kallar funktionen fakultet(5) så ska man få 5! men funktionen ska fungera med alla positiva heltal inom rimlig storlek.

b) Inom talteorin är lucastalen en talföljd L_n, definierad av:

$$L_n = \begin{cases} 2, & \text{om } n = 0 \\ 1, & \text{om } n = 1 \\ L_{n-1} + L_{n-2}, & \text{om } n > 1 \end{cases}$$

Om man kallar funktionen lucas(5) så ska man få det 5:e lucastalet, men funktionen ska fungera med alla positiva heltal inom rimlig storlek.

c) I John Wallis bok Arithmetica Infinitorum från 1656 publicerade han ett sätt att beräkna pi:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{8}{9} \cdots$$

Skriv en rekursiv funktion för att räkna ut pi. Enklast är att låta funktionen bara vara definierad för jämna inargument. Så till exempel ska `pi_wallis(1000)` ge ungefär 3.1400.

Collatz problem

Collatz problem är ett olöst problem inom talteorin. Problemet utgår från en räknelek som börjar med ett positivt heltal n. Nästa steg är att dela n med två om det är jämnt, eller multiplicera det med tre och addera ett om det är udda. Sedan upprepas detta steg till dess att resultatet blir ett. Collatz problem är att avgöra om man, oavsett vilket tal man börjar med, kan nå talet ett. Ni ska skapa ett program som skriver ut hur många steg det tar att nå ett när man ger programmet ett startvärde n.

Valentinas discordtrubbel

Valentina skapade en uppgift till sina elever på mattekollo med texten: *"Räkna ut värdet av X i följande uttryck:*

$X = n_1^{p_1} + n_2^{p_2} + \cdots + n_N^{p_N}$

där n_1, n_2 till n_N är heltal och p_1, p_2 till p_N är ensiffriga heltal."

Tyvärr är inte Valentina så duktig på Discord så när hon klistrade in uppgiften formatterades texten om och alla upphöjt i försvann ... Då såg det istället ut såhär:

$X = n_1 p_1 + n_2 p_2 + \cdots + n_N p_N$

Till exempel kommer en originaluppgift som ser ut såhär $X = 21^2 + 125^3$ att förändras till $X = 212 + 1253$.

Kan du skapa ett program som givet Valentinas nya problemtext ändå räknar ut den ursprungliga summan?

Ditt program ska först läsa in antalet termer N, och sen läsa in alla sammansatta tal np och skriva ut den summa som Valentina förväntade sig.

Några kluringar

Vad tror du att händer när koden körs? Fundera noga innan du testar att köra koden! Fundera sedan på varför du har rätt eller fel.

a)
```
>>> ['no', 'yes'][True]
```

b)
```
>>> (0, 'a') < (1, 0)
>>> (1, 'a') < (1, 0)
```

c)
```
>>> matrix = [[0] * 2] * 2
>>> matrix[0][0] = 1
>>> matrix
```

d)

```
>>> [1 if 2 else 3 for x4 in [5] if 6 if 7 if 8 if 9 or 0]
```

e)

```
>>> "hello" + True
>>> "hello" * True
```

f)

```
>>> a = [1,2,3]
>>> b = {'a': 'b', 'c': 'd'}
>>> a += b
>>> a
```

g)

```
>>> {True: 'yes', 1: 'no', 1.0: 'maybe'}
```

2. Legorobotar

2.1 Lathund för Python till legorobotar

Portar

Bokstäverna A, B, C, D är utgångar där man skickar ut signaler. Det kan vara signaler som bestämmer hur hjulen ska röra sig eller hur klon ska röra sig. Siffrorna S1, S2, S3, S4 är ingångar, där ansluts sensorer som till exempel ljussensor, ultraljud eller trycksensor. Portarna kommer man åt med:

```
from pybricks.parameters import Port
```

Klass Motor(port)

Motorerna får roboten att röra sig och styr klon. Importeras med:

```
from pybricks.ev3devices import Motor
```

Funktion run(hastighet)

Kör motorn med en konstant hastighet. Hastigheten anges i grader / sekund.

Funktion run_angle(hastighet, vinkel)

Kör motorn med en konstant hastighet ett visst antal grader.

Funktion run_time(hastighet, tid)

Kör motorn med en konstant hastighet under en viss tid. Tiden anges i millisekunder.

Funktion stop()

Stoppar motorn.

Parameter wait=False

Om man inte vill att roboten ska vänta på att instruktionen kör klart innan den går vidare kan man lägga till den namngivna parametern wait=False till funktionerna run_angle() eller run_time().

Klass TouchSensor(port)

Trycksensorn ger roboten känsel.

Funktion pressed()

Returnerar True om trycksensorn är intryckt, annars returnerar den False.

Klass ColorSensor(port)

Ljussensorn ger robotens syn.

Funktion color()

Mäter färgen på ytan som sensorn lyser på. Returnerar Color.BLACK, Color.BLUE, Color.GREEN, Color.YELLOW, Color.RED, Color.WHITE, Color.BROWN eller None om ingen färg detekteras.

Funktion reflection()

Mäter hur många procent av sensorns röda ljus som reflekteras tillbaka in i sensorn. Returnvärdet 0 betyder ingen reflektion och 100 betyder hög reflektion.

Klass UltrasonicSensor(port)

Ultraljudssensorn ger roboten ett övermänskligt sinne för att mäta avstånd.

Funktion distance()

Returnerar avståndet från sensorn till närmaste objekt med hjälp av ultraljudsvågor. Avståndet som returneras är i millimeter.

Klass GyroSensor(port)

Gyrosensorn ger roboten ett balanssinne.

Funktion angle()

Returnerar vinkeln som gyrot mäter, i grader.

Övrigt

Funktionen wait(tid)

Pausar programmet en stund. Tiden anges i millisekunder. Finns i pybricks.tools:

```
from pybricks.tools import wait
```

Knappar

Funktion buttons.pressed()

Returnerar en lista med de knappar på EV3-klossen som är intryckta just nu.

Högtalaren

Funktion speaker.beep(frekvens, tid)

Spelar upp en ton en viss tid. Tiden anges i millisekunder. Minsta möjliga frekvens är 100 Hz.

Funktion speaker.play_notes(noter, tempo)

Spelar upp en sekvens av noter. Till exempel kan du skicka in listan: ['C4/4', 'C4/4', 'G4/4', 'G4/4']. Tempo anges i BPM (slag per minut) där en fjärdedels not är ett slag.

Varje not består av en sträng enligt följande:

- Första tecknet är namnet på noten, A till G eller R för en paus.
- Till vissa noter kan man lägga till ett korsförtecken # eller b-förtecken.
- Notens namn följs av oktavnumret, mellan 2 och 8. Till exempel är C4 ettstrukna C. Oktavnumreringen ökar vid tonen C, så till exempel heter tonen precis innan C4 B3.
- Oktavnumret följs av ett snedstreck (/) och ett heltal som indikerar tonlängden. Till exempel betyder /4 att det är en fjärdedelsnot, /8 att det är en åttondelsnot och så vidare.
- Det går även att lägga till en punkt (.) efter noten för att indikera att det är en punkterad not. Det gör att noten blir 50% längre.
- Allra sist kan man lägga ett understreck (_) för att indikera en bindebåge mellan två noter, då kommer det inte vara någon paus mellan denna och nästa not.

Funktion speaker.say(text)

Låter roboten säga en valfri text. Normalt sett försöker den uttala orden på engelska, men med set_speech_options(sv") kommer den försöka uttala det på svenska.

Skärmen

Funktion screen.clear()

Tömmer skärmen.

Funktion screen.draw_text(x,y,text)

Skriver ut en text på skärmen på koordinat x, y. Origo är i övre vänstra hörnet.

Funktion screen.draw_image(x,y,bild)

Ritar en bild på skärmen. Bilden måste vara en svart-vit png. Det finns ett gäng färdiga bilder man kan använda, bland annat:

- ImageFile.ACCEPT
- ImageFile.WARNING
- ImageFile.ANGRY
- ImageFile.WINKING
- ImageFile.NEUTRAL

Funktion screen.draw_pixel(x, y)

Ritar en pixel på skärmen på angiven koordinat.

Funktion screen.draw_line(x1, y1, x2, y2)

Ritar en linje på skärmen som börjar i punkten x1,y1 och slutar i punkten x2,y2.

Funktion screen.draw_box(x1, y1, x2, y2)

Ritar en rektangel på skärmen med vänstra sidan på x1-koordinaten, övre sidan på y1 koordinaten, högra sidan på x2 koordinaten och nedre sidan på y2 koordinaten. Man kan skicka med den namngivna parametern fill=True om man vill skapa en ifylld rektangel.

Funktion screen.draw_circle(x, y, r)

Ritar en cirkel på skärmen med mittpunkt i x,y och radie r. Man kan skicka med den namngivna parametern fill=True om man vill skapa en ifylld rektangel.

Parametern fill=True

Man kan skicka med den namngivna parametern fill=True till funktionerna draw_circle() och draw_box() om man vill skapa en ifylld cirkel respektive rektangel.

2.2 Legorobotar: uppgifter

Vi ska tillsammans installera programvara för att programmera legorobotarna i Python. Vi ska gå igenom hur man kan komma åt sensorerna och motorerna och skickar över sina program. Vi kollar även på hur man får roboten att låta, och skriver ut saker på robotens skärm.

Uppgift: Åka i en fyrkant

Programmera roboten att åka i en kvadrat, fast med en loop. Här ska ni loopa 4 iterationer. Vad är fördelarna med att använda en loop istället för att skriva ut alla looparna?

Vad som kan varieras

Storleken på fyrkanten. Antal varv man ska åka runt i fyrkanten. Enkelt att ändra bara en siffra istället för att lägga till 8 rader kod för varje varv.

Var används detta på riktigt?

Programmerare är lata. Genom att använda loopar slipper man mycket arbete. Det är bättre att programmet automatiskt upprepar saker istället för att man ska skriva många rader kod.

Uppgift: Patrullrobot

Programmera en robot att åka fram och tillbaka mellan två svarta streck på marken för evigt.

Vad som kan varieras

Istället för att använda streck kan man ha en ultraljudssensor som känner av väggar. Roboten kan alltså åka mellan de två väggarna i korridoren utanför klassrummet och patrullera.

Var används detta på riktigt?

Om en robot ska vakta ett industriområde (eller en dörr) behöver den åka fram och tillbaka mellan två markeringar och ha koll på vad som händer. Robotar gör ofta väldigt enformigt arbete som människor inte vill göra.

Uppgift: Styra roboten

Ge roboten möjlighet att bli styrd med hjälp av dess knappar på EV3-klossen. Trycker man på pil uppåt ska roboten åka ca 10cm framåt. Trycker man på bil bakåt ska den åka bakåt. Pil höger roterar den 90 grader höger och pil vänster blir 90 grader åt vänster.

Vad som kan varieras

Om man trycker på mittenknappen ska klon öppnas om den är stängs, och stängas om den är öppen.

Var används detta på riktigt?

Ibland klarar inte en robot av att ta rätt beslut. Roboten kanske hamnar i en situation som den aldrig tidigare varit i och vet inte vad den ska göra. Då är det bra om en människa kan gå in och styra roboten rätt. Det kan också vara bra om roboten gör något farligt och man måste manuellt flytta tillbaka roboten, för ofta är de för tunga för att flyttas av muskelkraft.

Uppgift: Städrobot

Hålla sig inom ett område och städa rent det. Varje gång roboten ser en linje ska den backa, svänga och köra framåt igen. Puttar ut alla läskburkar från området tillslut.

Vad som kan varieras

Storleken på området. Man skulle också kunna lägga till något så att programmet avslutas när roboten städat ett tag (begränsar antal loop-iterationer).

Var används detta på riktigt?

Kan användas för att städa"ett bord (puttar ned allt på golvet). Ungefär som en städrobot eller dammsugarrobot. Gräsklipparrobotar brukar ha en linje/slinga runt hela trädgården som roboten ska hålla sig innanför.

Uppgift: Dammsugarrobot

Undvika att köra in i något. Samma som uppgift 2.2 fast man väntar på att roboten ska känna av något med ultraljudssensorn istället.

Vad som kan varieras

Området som ska köras runt. Kan vara bara på golvet och undvika väggar och kartonger och stolar. Dock har ultraljudssensorn svårt att känna igen smala bords- och stolsben.

Testa att svänga ett slumpmässigt antal grader vid varje sväng.

Var används detta på riktigt?

Detta är på samma sätt som robotdammsugare fungerar. En robotdammsugare krockar i saker och märker det och backar och svänger. Er robot är till och med bättre eftersom den inte behöver slå i någonting, den reagerar innan den krockar i nått!

Vanliga dammsugarrobotar är optimerade för att så snabbt som möjligt täcka av ett rum. Men eftersom roboten inte på förhand vet hur rummet ser ut används ofta slumpen och statistiska metoder för att öka chanserna att snabbt städa hela rummet.

Uppgift: Tetris

Om du kan läsa noter kan du låta roboten spela upp den ryska folkvisan som används i spelet tetris.

Vad som kan varieras

Testa att spela in en annan låt.

Uppgift: Linjeföljare

Följa en linje. Bryt ned enkla mänskliga instruktioner följ en linjetill en sekvens av instruktioner som en dator förstår. Det är inte det enklaste att förstå hur roboten ska följa en linje.

Vad som kan varieras

Hur linjen ska dras. Testa att göra olika skarpa linjer eller korsningar och se vad som händer.

Var används detta på riktigt?

Linjeföljande robotar finns överallt! Det finns tävlingar med dem och de används i industrin. Många robotar guidas av kablar. Vår robotgräsklippare hittar tillbaka till laddstationen med hjälp av en guidekabel som den följer på samma sätt som ni precis gjort. En förarlös bil ser linjerna på vägen och följer dem.

Uppgift: Följa linje till burk

Beskrivning

Följ linjen tills roboten hittar en burk. Fånga den och sen fortsätta följa linjen.

Vad som kan varieras

Istället för att fortsätta följa linjen med burken kan man fånga den vrida roboten 90 grader och köra av linjen och släppa burken, för att sen backa tillbaka till roboten känner av linjen och vrida upp sig och fortsätta följa linjen!

Man kan ställa dit ett hinder längsmed linjen som roboten ska detektera och köra runt, och sedan fortsätta på andra sidan.

Man kan också låta linjen upphöra på ett ställe och fortsätta längre fram. Då ska roboten upptäcka att linjen tog slut och sedan fortsätta följa den längre fram. Detta är en svår uppgift att lösa med endast en ljussensor, men det går!

Var används detta på riktigt?

Robotar på ett pappersbruk förflyttar stora pappersrullar genom att följa linjer på golvet.

Det är ofta det kommer fram en människa framför transportroboten och då måste roboten såklart kunna stanna! Annars dör människan. Ännu bättre vore förstås om roboten kunde köra runt människan.

Uppgift: Sluta följa linjen när den kommer till vit markering

Sluta följa linjen när den kommer till en vit markering.

Vad som kan varieras

Man kan med fördel placera en burk i slutet av linjen som roboten ska gripa tag i och förflytta!

Var används detta på riktigt?

Robotar använder sig ofta av något som kalla beacon, vilket betyder markörer på svenska. Dessa använder roboten för att veta var den befinner sig. De kan bestå av t.ex. färgmarkeringar eller saker som sänder ut strålning som roboten reagerar på.

Uppgift: Egen funktion för att köra rakt fram

Skapa en egen funktion som tar in cm som roboten ska åka istället för varv eller grader på hjulen. Använd variabler för hjulens storlek.

Vad som kan varieras

Bygg vidare på funktionen för att köra rakt och lägg in ett gyro så att den alltid kör rakt oavsett om det är ojämnt underlag.

Var används detta på riktigt?

Bra med funktioner som man kan återanvända fler gånger. Dessutom bra att kunna ange i enheter som är enklare att relatera till. Skapar mindre fel då.

Uppgift: Egen funktion för att svänga

Skapa ytterligare en funktion som tar in antal grader roboten ska svänga. Testa att gör den **utan** gyro-sensorn, utan med matematik som räknar ut hur långt motorerna ska svänga för att uppnå en viss vinkel.

Vad som kan varieras

Bygg vidare på funktionen ovanför och ange en svängradie på svängen, istället för att alltid svänga kring robotens centrum. Då kan man ange hur stor cirkel robotens centrum ska förflytta sig längsmed.

Uppgift: Övergångsställe

Räkna linjerna i en variabel, och stanna efter att roboten passerat 4 linjer. Skulle man vilja ändra nått ljusvärde behöver man bara göra det på ett enda ställe.

Vad som kan varieras

Kör fram till en vägg och räkna antalet linjer som roboten har passerat fram tills dess. Skriv ut antal passerade linjer på skärmen.

Var används detta på riktigt?

Linjerna på rad kan ses som ett övergångsställe som roboten måste upptäcka.

Variabler är bra för att kunna komma ihåg saker som har skett tidigare.

Uppgift: Håll avståndet!

Försök att hålla ett visst avstånd till ett föremål framför den, t.ex. din hand eller en kartongskiva. Roboten ska backa om kartongen kommer för nära, och köra framåt om kartongen flyttas bort från roboten.

Vad som kan varieras

Olika avstånd. På hur långt avstånd kan den maximalt följa med? Vad händer om du rör föremålet för snabbt? Vad händer om den tappar bort föremålet? Lägg till någon form av sökbeteende? Kan ni sätta flera robotar i rad som följer varandra?

Går att skapa en P-regulator, vilket betyder att den åker fortare om kartongen är långt ifrån gränsen, och långsammare om den är nära avståndsgränsen.

Var används detta på riktigt?

Volvo utvecklar just nu fordonståg där lastbilar kör utan förare. Det finns en förare i första lastbilen som styr, sedan lägger sig flera andra på ett fast avstånd till bilen framför. Detta för att det blir billigare att slippa betala lön till förarna i lastbilarna längre bak, dessutom spar de bränsle eftersom de kan ligga väldigt tätt och få bort luftmotstånd.

Uppgift: Gyro-regulator

Gyroregulator, får roboten att åka rakt med hjälp av data från gyro-sensorn. Det här är vad som brukar kallas P-regulator.

Vad som kan varieras

Försök få roboten att klara så stora störningar som möjligt. Lägg ut papper framför roboten som gör att hjulen spinner/slirar. Eller lägg ut andra små störningsmoment, kanske tändstickor om vi har några. Knuffa på roboten.

Lägg till ett ljud som säger Äj"eller "uschöm nån puttar på roboten för mycket.

Utveckla P-regulatorn mer och lägg till en integrerande och deriverande del så att det blir en PID-regulator.

Var används detta på riktigt?

Att köra rakt trots störningar är viktigt. Världen är sällan helt ideal och ska man göra en robust robot måste den använda sig av sensorer för att ta sig fram. Om man bygger en skogsrobot som ska ta sig fram över stockar och stenar används ofta gyrosensorer.

Uppgift: Grafritare

Låt roboten mäta avståndet framför roboten eller vinkeln på roboten och rita ut sensorvärdet som en graf på skärmen. Du kan både låta roboten rotera själv, eller lyfta upp roboten och rotera med handen.

Vad som kan varieras

Istället för att mäta avstånd kan man plotta något annat. T.ex. färgen på underlaget så får du en "karta"över vilka nyanser golvet har längsmed en sträcka. Förslagsvis låter man roboten köra framåt istället för att rotera på stället.

Var används detta på riktigt?

Ofta så får man en bättre förståelse av sensordata i en graf istället för att bara läsa av en siffra på en skärm. Det är ofta viktigt att se hur något varierar över tid och i en graf kan du se historisk data enkelt.

Uppgift: Kartering

Låt roboten rotera ett varv och mät avståndet fram till närmsta objekt vid varje grad. Rita ut en graf i fönstret på roboten där X koordinaten representerar vinkel och Y-koordinaten motsvarar dess avstånd. Då får man en form av karta över omgivningen.

Vad som kan varieras

Istället för att bara rotera ett varv kan man låta roboten köra framåt eller bakåt och sen rotera igen för att bygga en större karta. Detta kallas för SLAM.

Var används detta på riktigt?

Räddningsrobotar skickar man in i okända områden och då måste de skapa sig en karta när de åker runt. De använder ultraljud och lasersensorer (LIDAR) för att mappa upp området som de är aktiva i.

3. Introduktion till spelprogrammering

3.1 Objektorientering

Idag kommer vi gå igenom objektorientering från grunden för att vara redo inför spelprogrammering imorgon. Vi kommer bland annat kika på överlagring, magiska metoder, decorators och multipla arv.

Uppgift: Skapa en punkt

Skapa en klass som innehåller en x och y koordinat. Överskugga `__abs__`-metoden så att den räknar ut punktens avstånd till origo.

Överskugga kallas override på engelska. Vad är skillnaden mellan overriding (överskuggning) och overloading (överlagring)? Finns båda i Python?

Uppgift: Geometriska former

Skapa en klass som heter GeometriskForm vars init-metod tar geometriska formens namn. Den ska även innehålla en metod för arean. Överlagra även `__str__` metoden som skriver ut formens namn.

Sen ska du skapa två barn-klasser, en Kvadrat och en Cirkel. Låt kvadraten ta in sidlängden som parameter till sin init-metod, och cirkeln ta in radien. Glöm inte anropa sin förälders init-metod med `super()`! Överskugga även area-funktionen så att den räknas ut rätt.

```
a = Square(4)
b = Circle(7)
print(b)
print(b.area())
print(a)
print(a.area())
```

Som ni ser så anropas `__str__` funktionen från basklassen.

Uppgift: Zoologiska trädgården

Skapa en ursprungsklass Djur. Lägg även till metoder som `äta()`, `sova()` till djuret.

Sen skapar du klasser för däggdjur och för fåglar. Lägg till vettiga metoder som `lägg_ägg()` eller `flyga()` till fågeln och `gå()` och `dia()` till däggdjuret.

Och sist skapar du djur som ärver från respektive klass. Typ Elefant från däggdjur och Skata från fåglar. Lägg till fler metoder som `vifta_med_snabeln()` och `kraxa()` till djuren.

Skapa en statisk metod som skriver ut fakta om djuret. Den kan vara statisk eftersom den inte opererar på en specifik individ (ett objekt) utan istället på djuret (en klass).

Lägg prints i varje metod så vi kan se vad som anropas. Testa skapa dina objekt och anropa metoderna! Lägg gärna prints i init-metoden också för att se vilken ordning de körs!

Hur skulle du implementera ett näbbdjur som är ett däggdjur, men som lägger ägg? Hur skulle du hantera en struts som är en fågel som inte kan flyga?

Kan inte låta bli att smyga in en gåta: Finns det fåglar som inte lägger ägg? *

Överkurs: Förhindra att man instansierar ett objekt av Djur, Däggdjur eller Fågel-klassen direkt. De får bara skapas av sina barn. Använd `__new__()`.

Uppgift: Komplexa tal

Skapa en klass som representerar komplexa tal. Överskugga metoderna för addition, subtraktion, multiplikation, division, längd och absolutbelopp så att de fungerar som man förväntar sig:

$$z_1 = a + bi$$
$$z_2 = c + di$$
$$z_1 + z_2 = (a+c) + (b+d)i$$
$$z_1 - z_2 = (a-c) + (b-d)i$$
$$z_1 \cdot z_2 = (ac-bd) + (ad+bc)i$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(ac+bd) + (bc-ad)i}{c^2+d^2}$$
$$|z_1| = \sqrt{a^2+b^2}$$

Uppgift: Konvertera viktenheter

Skapa en funktion som konverterar vikter till kg. Den ska till exempel kunna anropas såhär:

```
>>> till_kg(hekto=10)
>>> till_kg(gram=25)
>>> till_kg(ton=3)
>>> till_kg(uns=12.5)
>>> till_kg(pund=10.1)
```

Vill du så lägg till några ryska enheter som dolja, zolotnik och berkovets.

Uppgift: Jämna tal

Skriv en subklass till `int` som alltid ska vara ett jämnt nummer, avrunda input till närmaste jämna nummer.

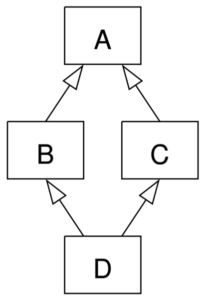
Uppgift: Begränsa antalet skapade objekt

Låt oss säga att vi vill skapa en rektangel med fyra hörn. Skapa en ny klass som representerar hörnen i fyrkanten, som ärver från klassen du skapade i Uppgift 3.1. Begränsa även konstruktorn så att man bara kan skapa 4 element av klassen.

```
>>> p1 = SqPoint(0,0)
>>> p2 = SqPoint(1,0)
>>> p3 = SqPoint(1,1)
>>> p4 = SqPoint(0,1)
>>>
>>> p5 = SqPoint(2,2)
Traceback (most recent call last):
...
ValueError: Cannot create more objects
```

Uppgift: Den dödliga diamanten

”Diamantproblemet” är en tvetydighet som uppstår när två klasser B och C ärver från A, och klass D ärver från både B och C. Om det finns en metod i A som B och C har överskuggat, men som D inte har överskuggat. Vilken version av metoden ärver D: den från B, eller den från C?



Överkurs: Rita upp släktträdet för följande arv:

```
>>> O = object
>>> class F(O): pass
>>> class E(O): pass
>>> class D(O): pass
>>> class C(D,F): pass
>>> class B(D,E): pass
>>> class A(B,C): pass
```

Skriv in i vilken ordning de ärvs. Orkar man inte lägga in massa print-satser kan man anropa funktionen mro() på till exempel klass A så syns det i vilken ordning dess föräldrar ärvs. Man kan se att den går i logisk ordning från barn till föräldrar, vidare till mor- och farföräldrar och uppåt.

Testa nu att byt plats på D och E i arvsordningen för B. Vad händer nu? Varför ärvs det inte längre i kronologisk ordning från barn och uppåt?

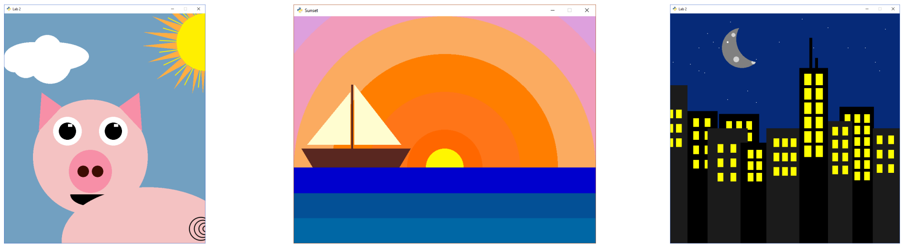
* Svaret på gåtan: Ja, hanfåglar såklart!

3.2 Arcade

Idag kommer vi gå igenom lite spelprogrammering med Arcade!

Uppgift: Rita en bild

Rita en valfri bild med hjälp av Arcade-biblioteket i python.



Figur 3.1: Exempel på vad man kan rita

Importera arcade i python-filen genom att skriva

```
import arcade
```

och öppna ett fönster från arcade-biblioteket och skriv en titel. Välj Fönstrets dimensioner (bredd och höjd) och börja rita. Du kan bland annat använda dig av arcade-funktionerna nedanför.

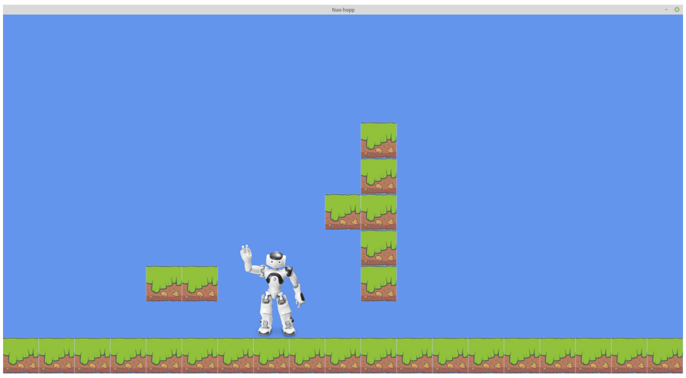
```
arcade.open_window(800, 600, "Titel") # öppnar ett fönster med bredd 800, höjd 600 och titel "Titel"
arcade.set_background_color(arcade.color.AFRICAN_VIOLET) # skapar en bakgrundsfärg
arcade.start_render() # gör sig redo för att börja rita

# rektangel som defineras utifrån x- och y-positionerna till rektangelns kanter. Först x-positionen till vänstra kanten (0), därefter x-positionen till högra kanten (800), sedan y-positionen till den övre kanten (200) och till sist y-positionen till den nedre kanten(0):
arcade.draw_lrtb_rectangle_filled(0, 800, 200, 0, arcade.color.BITTER_LIME)
# rektangel som defineras utifrån rektangelns centrum (x- och y-positionen (70,260)), följt av bredden (30) och höjden (40) till rektangeln:
arcade.draw_rectangle_filled(70, 260, 30, 40, arcade.color.BONE)
# triangel med hörnpositionerna (100, 470), (280, 470) och (190, 500):
arcade.draw_triangle_filled(100, 470, 280, 470, 190, 500, arcade.color.BROWN)
# polygon med hörnpositionerna (20,350),(100, 470),(280, 470) och (360, 340):
arcade.draw_polygon_filled([[20, 350],
                            [100, 470],
                            [280, 470],
                            [360, 340]],
                           arcade.color.BROWN)
# cirkel med centrum i (400,100) och radie 50:
arcade.draw_circle_filled(400, 100, 50, arcade.color.BLACK_OLIVE)
```

```
arcade.finish_render() # avslutar möjligheten att rita
arcade.run() # Låter fönstret vara öppet tills någon stänger det
```

Fönstrets origo (0,0) ligger i det nedre vänstra hörnet.
Du kan byta ut draw_circle_filled mot draw_circle_outline om du enbart vill ha kanterna till föremålet, istället för att den ska vara ifylld. För att se vad färgerna heter kan du gå in på länken `https://api.arcade.academy/en/latest/arcade.color.html`. Du kan hitta fler geometriska former och rit-hjälpmedel på `https://api.arcade.academy/en/latest/examples/drawing_primitives.html`.

Uppgift: Förbättra spelet

Efter vår code-along är det er uppgift att förbättra spelet! Här kommer några förslag på vad ni kan implementera:



Figur 3.2: Naospelet

- Spegla spelaren när den går åt höger eller vänster
- Kunna ducka under vissa block
- Lägg till nått som ger poäng
- Skapa fiender
- Lägg till ljudeffekter

Uppgift: Gör ett eget spel

Skapa ett eget valfritt spel. `https://kenney.nl` innehåller en hel del gratis paket med grafik och ljud för spel. Annars är google din vän.

4. Introduktion till tävlingsprogrammering

Idag ska vi gå igenom problemlösning med programmering, framförallt ska vi titta på två typer av lösningsgångar, den ena är bruteforce och den andra är simuleringar. En dator är väldigt snabb så den kan testa igenom alla lösningar snabbare än en människa! Imorgon är det programmeringstävling! Då kan dessa kunskaper komma till nytta!

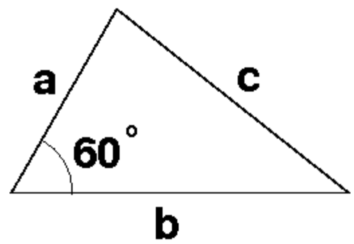
Bruteforce

Lagomvinklade trianglar

En lagomvinklad triangel är vad vi i denna uppgift kallar en triangel där minst en av vinklarna är exakt 60 grader. De lagomvinklade trianglarna känner sig ofta förbisedda jämfört med de mycket mer kända rätvinkliga trianglarna (så kallat mindervinkelkomplex), trots att de lagomvinklade också har en snygg formel för sina sidlängder:

$c^2 = a^2 + b^2 - ab$

Skriv ett program som skipar lite rättvisa i detta triangeldrama genom att fråga efter ett tal N (mellan 1 och 100) och sedan skriva ut hur många lagomvinklade trianglar det finns vars sidor är heltal i intervallet 1 till N.



Figur 4.1: Exempel på en lagomvinklad triangel med sidlängderna $a = 5, b = 8$ och $c = 7$.

Två körningsexempel

```
Talet N ? 25
Antal trianglar: 35

Talet N ? 70
Antal trianglar: 112
```

Send more money

Ersätt varje bokstav med en unik siffra mellan 0 och 9 så att uträkningen i figur **??** stämmer. Notera att talen inte kan börja med 0, för i så fall skulle man kunna strunta i att skriva ut första bokstaven.

```
  SEND
+ MORE
------
 MONEY
```

Klockan

Om någon frågar hur mycket klockan är, svarar de flesta ”kvart över fem”, 15:29 eller något liknande. Vill man göra det lite svårare så kan man annars svara med vinkeln mellan tim- och minutvisaren, eftersom man ur denna information entydigt kan bestämma klockslaget. Dock är det många människor som är ovana vid detta sätt att ange tider, så det vore bra att ha ett datorprogram som översätter till ett mer normalt format. Du ska skriva ett sådant program.

Vi förutsätter att vår klocka saknar sekundvisare och endast visar ett helt antal minuter (det vill säga: båda visarna hoppar framåt bara på hel minut). Vinkeln avläses genom att utgå från timvisaren och sedan mäta hur många grader medurs minutvisaren ligger (se figur **??**). För att undvika decimaler anges vinkeln i tiondels grader (så att 85.5 grader skrivs som 855). Detta tal är alltid ett heltal mellan 0 och 3595 (inklusive) och är, som en följd av att endast hela minuter visas, alltid delbart med 5.

Programmet ska fråga efter en vinkel och sedan skriva ut tiden i vanligt digitalformat, alltså h:mm eller hh:mm, beroende på antalet timmar. Vi förutsätter att det är morgon, så alla tider ska ligga mellan 0:00 och 11:59 (inklusive).

Två körningsexempel

```
Vinkel ? 855
Klockan är 1:21

Vinkel ? 3140
Klockan är 3:08
```

Simulering

Snöskottning

Scott har som många andra haft problem under vintertiden med all snö. Scotts hus måste skottas ofta, men han tycker själv att skotta varje dag är för ofta. Du ska hjälpa Scott att sätta upp ett skott-schema för de kommande N dagarna. Till din hjälp har du en detaljerad väderleksprognos, så du vet exakt hur många cm det snöar eller smälter varje dag (innan kvällen). När det ligger minst H cm snö en kväll så är det dags att skotta, och när man skottar så försvinner all snö. Från början är det ingen snö alls.

Indata

Första raden innehåller antalet dagar $1 \leq N \leq 100$ och andra raden snötröskeln $1 \leq H \leq 1000$. Därefter följer N heltal mellan -100 och 100 (inklusive). Dessa tal beskriver hur många cm snö det kommer under var och en av de kommande N dagarna. Ett negativt värde betyder att denna mängd smälter istället (men snötäcket kan naturligtvis aldrig bli mindre än 0).

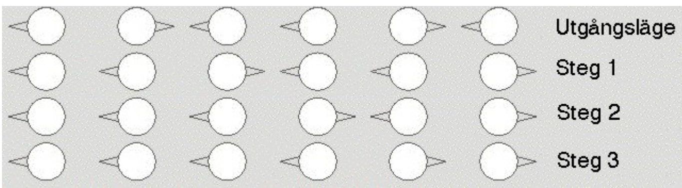
Utdata

Utdatat ska bestå av ett heltal, antalet kvällar Scott måste skotta.

Körningsexempel:

```
Antal dagar? 10
Snögräns? 27
Snöförändringar? 5 -7 8 19 -20 22 8 26 -15 14
Scott behöver skotta minst 2 gånger
```

Soldater



Ett antal soldater står på ett led alla vända mot furiren, när han ger ordern "höger om". Eftersom många av soldaterna har svårt att skilja på höger och vänster blir det mest slumpen som avgör åt vilket håll de vänder sig. Ett exempel visas på första raden i figuren ovan. De soldater som på så sätt hamnar ”öga mot öga” med en granne förstår båda två att de vänt sig åt fel håll och gör därför helt om (180 grader), för att kanske hamna öga mot öga med den andra grannen. Denna procedur fortsätter (steg 1 och 2 i figuren) och upphör då inga soldater längre är vända mot varandra (steg 3).

Indata En rad där varje tecken är antingen V eller H. Dessa anger åt vilket håll soldatens näsa pekar i utgångsläget. Maximalt 100 tecken.

Utdata Programmet ska skriva ut hur många steg som behövs från utgångsläget tills lugnet infinner sig.

Körningsexempel:

```
Soldater? VHVVHV
Det behövs totalt 3 steg för att lugna soldaterna

Soldater? HVHVHVHHVHVHVHVVHHHHVHHVHVVVHHVHHVHVHVHVHVHVHHH
Det behövs totalt 24 steg för att lugna soldaterna
```

Robotar

Fredrik gillar skattjakter, jättemycket. Och robotar, faktiskt ännu mer. Nu har han programmerat en robot att följa en skattkarta. På skattkartan är varje ruta markerad med pilar för att visa åt vilket håll roboten ska gå från den rutan.

Roboten börjar alltid i den ruta som befinner sig längst upp till vänster på skattkartan, och följer därefter pilarna. I labyrinten finns det två olika mål: ett batteri, samt en läskig elstöt. Det kan också hända att skattkartan leder runt roboten i en oändlig cykel av rutor så den aldrig når ett mål. Kan du hjälpa roboten att avgöra vilket mål den når, eller om den kommer gå runt i all oändlighet?

Indata Följande tecken förekommer i skattkartan: ″<″, ″>″, ″v″, ″^″, ″B″, ″E″.

Roboten börjar på den första rutan i den första raden av skattkartan. Skattkartan är konstruerad så att roboten aldrig kommer lämna labyrinten när den följer pilarna.

Utdata Ditt program ska skriva ut vad som händer för roboten.

Körningsexempel:

```
vB<
vE^
>>^
Roboten kommer gå till Batteriet.
v>>v
>^Ev
vv^v
B<^<
Roboten får en elstöt.
v<E
>^B
>>^
Roboten kommer gå runt, runt, runt för evigt.
vv<<<<<
vv>>v^^
vv^<vB<
vE^v<<^
v>^v^<^
>^<>>>^
Roboten kommer gå till Batteriet.
```

Appendix

A.1 Hitta parametern: kodmall

```
# För Mattekollo 2021. Skrivet den 2021-08-09 på Erken, Norrtälje av Benjamin Verbeek.

# Import necessary modules
import math                 # för matte (typ log etc.)
from scipy import optimize      # nödvändig för minimering av LL-funktionen

# Mätdatan följer fördelningen X ~ 1 + ax^2, där a är den sökta parametern
# läser indata från .txt-fil
file = open("datasetC.txt") # öppna fil
mätdata = [ float(i[:-2]) for i in file.readlines() ]   # läser in datan
file.close()     # stäng fil
print("Indata läst.")

print(mätdata[:5])

def täthetsfunktion(a,x):
    return (1+a*x**2)/(2+2*a/3)

def MLL(a):
    L = 0
    for data in mätdata:
        L += math.log(täthetsfunktion(a, data))
    return L

res = optimize.minimize(MLL, [1], (), tol=10**-4, bounds=[(-0.9,None)])

print(res)



# Nedan följer ett exempel på en funktionsminimering:
# res = optimize.minimize(funktionAttMinimera, [startgissning], (mätdata), tol=10**-4, bounds=[(-0.9,None)])
# print(res)

########### DIN KOD NEDAN: ###########
```

Häftet innehåller material från Mattekollo 2021 för åk 9-gy2, alla matematiklektioner samt programmeringsmaterial för nybörjare.

Tack till alla deltagare och ledare!