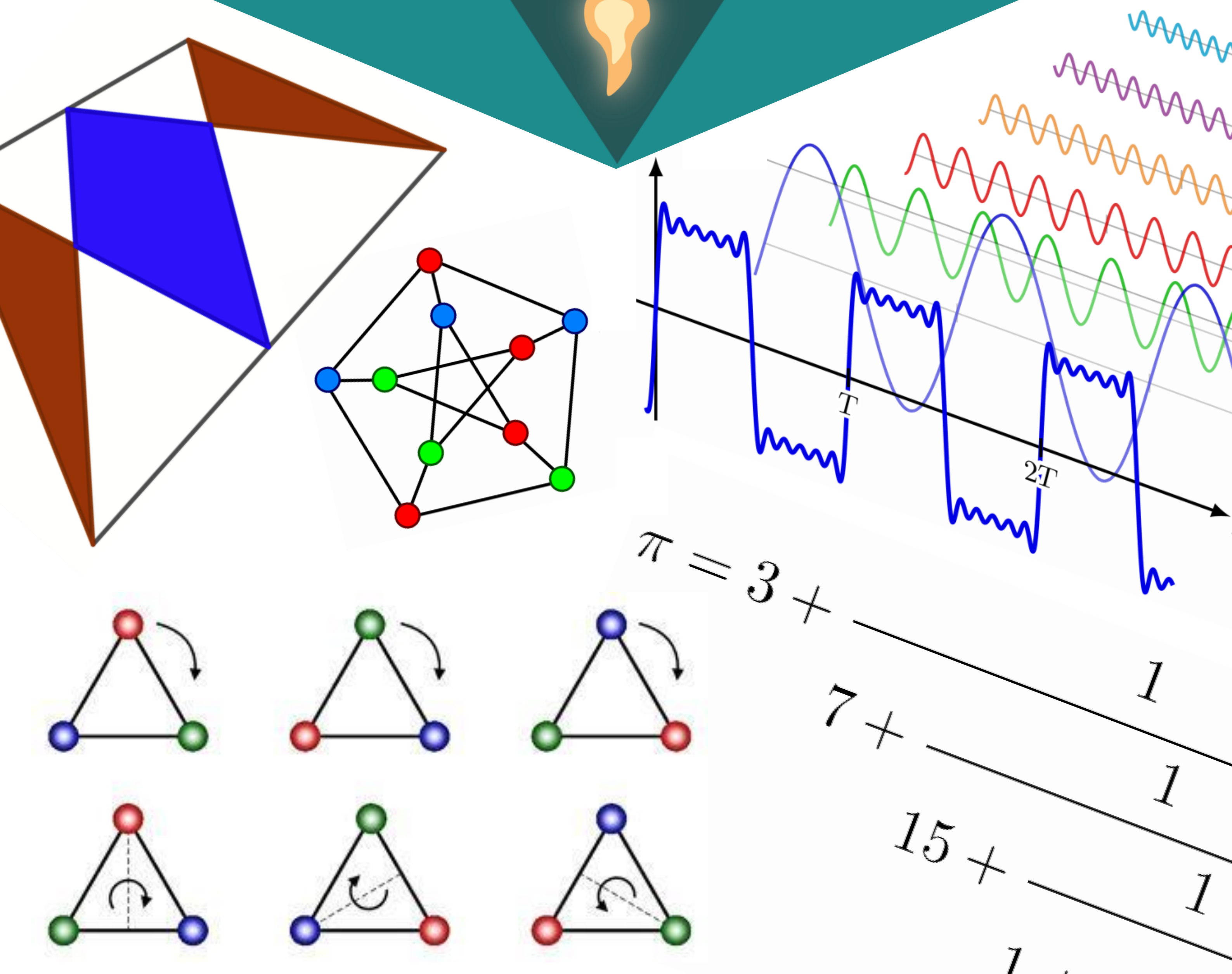
MATTEKOLLO 2024

MMXXIV



Mattekollo 2024

Lektionsmaterial

V. Chapovalova, N. Dahlfors, J. Enbäck, K. Haagensen Strömberg, W. Kraft,

A. Latyntsev, E. Lieback, L. Lokteva, L. Molokov, L. Nilsson, E. Pelander, I. Ängquist

Linköping, juli 2024

Grupp 1

1. Kombinatorik I

16:e juli

1. Ellen ska åka bil till mattekollo. På hur många olika sätt kan hon ta sig dit om de vägar hon har att välja på går enligt följande?

2. Kevin har tagit med tre olika tröjor (en turkos, en gul och en orange), två par byxor (gröna och svarta) och två par skor (röda och vita) till Mattekollo. Hur många dagar kan Kevin välja en uppsättning med en tröja, ett par byxor och ett par skor om han aldrig vill ha samma uppsättning som han haft tidigare?

3. Linn har glömt sina brädspel hemma och hon går därför till brädspelsbutiken för att köpa fler. Där kan hon välja på tre olika spel: Avalon, Blokus och Catan. Dessutom finns det två olika tillbehör: Förvaringspåse och Spelmatta.
   a. På hur många olika sätt kan Linn välja ett spel och ett tillbehör?
   b. På hur många olika sätt kan Linn välja ett spel om tillbehör är frivilligt?
   c. På hur många olika sätt kan Linn välja om hon tar ett eller två spel med ett frivilligt tillbehör?

4. På Valla ska Kevin gå in i matsalen för att sno en kaka. Det finns 6 dörrar till matsalen. På hur många olika sätt kan Kevin gå in och ut ur matsalen om han
   a. Får ta samma dörr in och ut?
   b. Inte får ta samma dörr in och ut?

5. Hur många 5-siffriga tal kan bildas med siffrorna 1 och 2?

6. Linn har nu fått tag på 7 olika brädspel som hon jättegärna vill spela. Tyvärr hinner ni bara spela tre omgångar innan det är dags att äta middag. På hur många olika sätt kan ni göra detta om
   a. Linn kan tänka sig att spela samma spel flera gånger?
   b. Linn bara vill spela varje spel max en gång?

7. En AI-robot ska starta en restaurang. Den har lärt sig laga 6 förrätter, 10 huvudrätter och 7 efterrätter. Hur många olika 3-rättersmiddagar kan roboten servera?

8. AI-roboten kom fram till att det blev för många rätter med sitt förra upplägg och bestämmer sig för att starta en hamburgerrestaurang istället. Nu erbjuder den en valfri kombination av åtta olika tillbehör: senap, ketchup, lök, sallad, tomat, bostongurka, ägg och ost. Man kan också få sin hamburgare utan något tillbehör. AI-roboten kommer fram till att den nu kan laga 256 olika hamburgare. Stämmer det?

9. Du skall välja kläder att ha på dig under dagen och du har 2 garderober. I den vänstra garderoben finns det 3 par byxor och 4 t-shirts och i den högra finns det 8 par byxor och 10 t-shirts. På hur många sätt kan du välja en uppsättning byxa och t-shirt om båda klädesplaggen ska komma från samma garderob?

10. I Morsealfabetet får man använda symbolerna punkt och streck. Till exempel blir bokstaven "S" tre punkter i Morsealfabetet, medan bokstaven "O" blir tre streck. Hur många bokstäver (och andra tecken) kan man koda om varje bokstav ska kodas olika och bokstaven får som mest vara fem symboler lång?

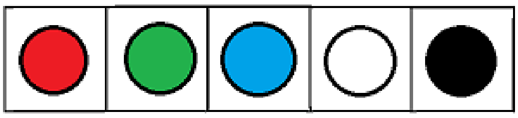
Extrauppgifter

11. Hur många 7-siffriga tal kan man bilda med siffrorna 1 och 2 om första siffran måste vara 1 och sista siffran måste vara 2?

12. Hur många 7-siffriga tal kan man bilda med siffrorna 1 och 2 om både 1 och 2 måste förekomma bland de två första siffrorna?

13. Hur många 7-siffriga tal kan man bilda med siffrorna 1 och 2 om både 1 och 2 måste förekomma bland de tre första siffrorna?

14. Du har fem bollar i färgerna röd, grön, blå, vit och svart och fem lådor som ligger på en rad. På hur många sätt kan du lägga bollarna i lådorna?



15. **(a)** På hur många sätt kan man välja 4 kort av olika valörer från en full kortlek (som består av 52 kort, med 13 valörer och 4 färger)?

(b) På hur många sätt kan man välja 4 kort av olika valörer och olika färger från en full kortlek?

(c) På hur många sätt kan man välja 4 kort från en full kortlek så att det finns åtminstone två kort av samma valör bland dem?

2. Visuella bevis I

16:e juli

Vad är ett bevis?

Bevis är en viktig byggsten av matematiken. Ett matematiskt bevis förklarar varför ett påstående är sant med noga resonemang och tydliga antaganden. Det är på grund av bevis som man inom matematiken kan vara så mycket säkrare på vad som är sant än i andra vetenskaper.

Ofta använder man bara ord när man skriver bevis. Visuella bevis, å andra sidan, använder istället bilder. Visuella bevis är inte lika formella som "riktiga" bevis, men de kan ändå vara väldigt vackra och ge insikt.

När man skriver bevis så börjar man med så kallade *postulat*. Dessa påstående är såpass självklara att man inte behöver bevisa dem. Genom att kombinera postulat kan man bevisa mer avancerade påståenden.

2.1 Postulat om area

Postulat 1

Varje figur på planet har en area som är ett icke-negativt tal.

Postulat 2

Om du sätter ihop några figurer till en ny figur så blir arean av den nya figuren lika med summan av areorna av delarna.

Postulat 3

Kongruenta figurer har samma area. (Två figurer kallas kongruenta om du kan transformera den ena till den andra genom att flytta, rotera och/eller reflektera den.)

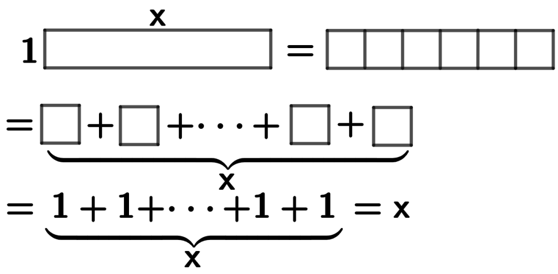
Postulat 4

En 1×1-kvadrat har arean 1 (en areaenhet).

2.2 Arean av en rektangel

Sats 2.1. Arean av en $1 \times x$-rektangel är x, för alla heltal x.

Visuellt bevis

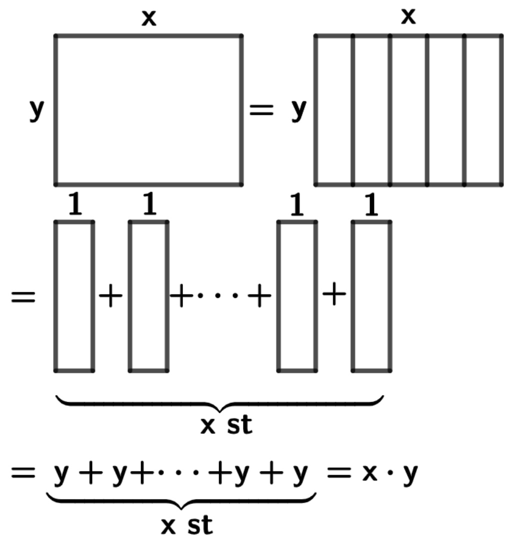


(Postulat 2)

(Postulat 4)

Sats 2.2. Arean av en $x \times y$-rektangel är $x \cdot y$, för alla heltal x och y.

Visuellt bevis



(Postulat 2)

(Sats 2.1)

■

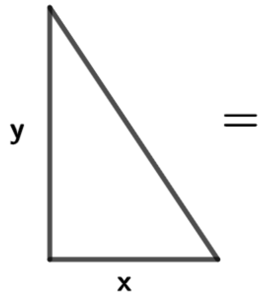
2.3 Arean av en triangel

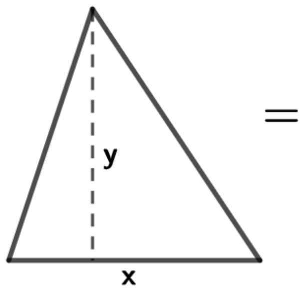
1. Hitta arean på triangeln nedan och bevisa att ditt svar är rätt. Rutorna är enhetskvadrater.

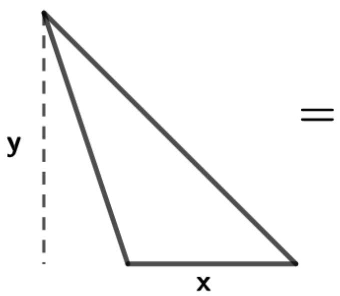
2. Bevisa följande sats. Utgå från att du redan kan rektangelns areaformel.

Sats 2.3. Arean av en triangel är $\frac{x \cdot y}{2}$ där x är basen och y är höjden.

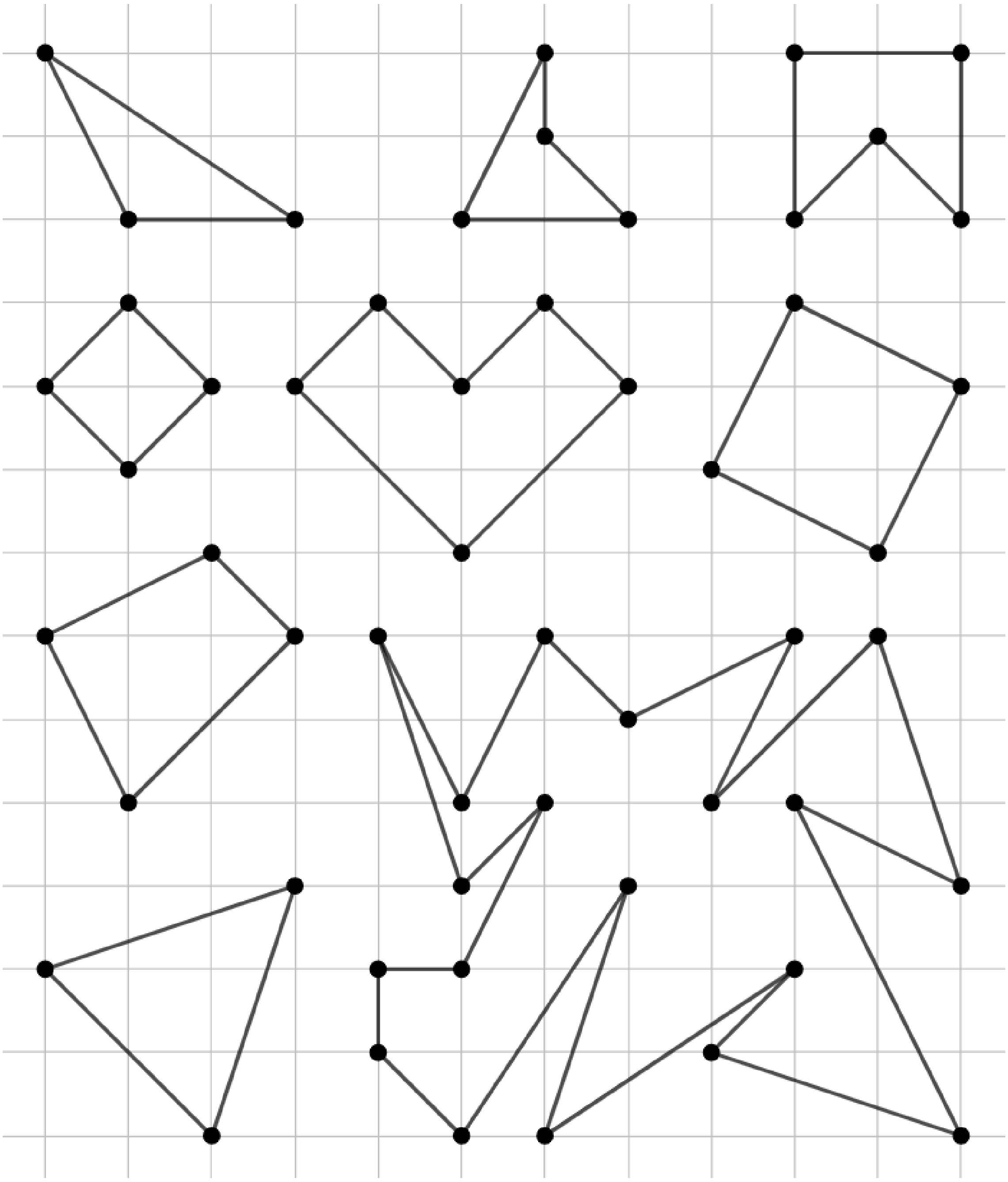
Visuellt bevis



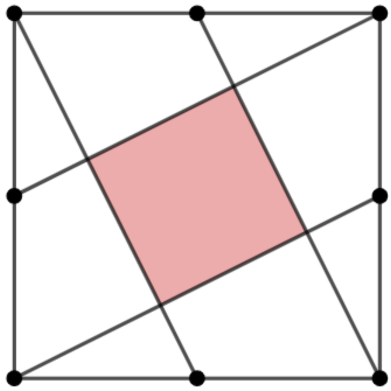




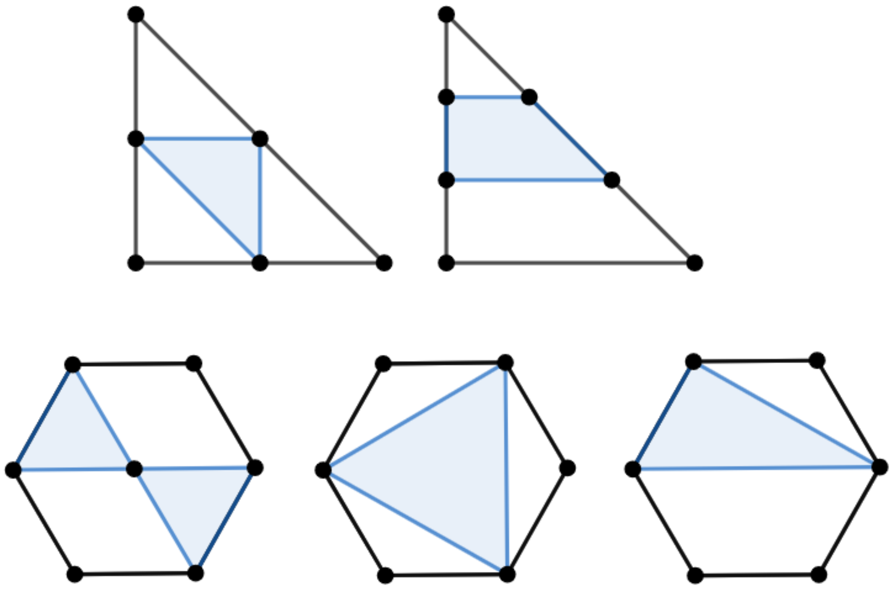
3. Hitta arean av så många figurer som möjligt. Välj sedan en av figurerna och skriv ett visuellt bevis för ditt svar.



4. Den stora kvadratens sidlängd är 2. Hur stor area är skuggad?



5. Hur stor andel av figurerna är skuggade? Anta att alla sträckor och vinklar som ser lika ut är lika.



3. Kombinatorik II

17:e juli

Definition. En **permutation** är en omordning av en lista av objekt.
T.ex. skulle en permutation av ABCDEF kunna vara DBECAF.

Definition. En **kombination** är ett val av några objekt från en samling objekt.
T.ex. skulle en kombination av ABCDEF kunna vara AB.

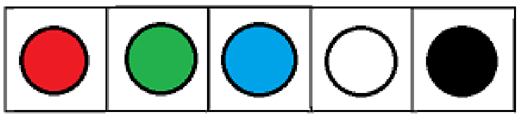
1. Ellen och Linn har hittat på ett eget språk som bara använder bokstäverna A, B, C, D.

   (a) Hur många 4-bokstaviga ord kan de bilda om varje bokstav får användas flera gånger?

   (b) Hur många 3-bokstaviga ord kan de bilda om varje bokstav bara får användas en gång?

   (c) Hur många 4-bokstaviga ord kan de bilda om varje bokstav bara får användas en gång?

2. Du har fem bollar i olika färg och fem lådor på rad. Det får bara plats en boll i varje låda.



   (a) På hur många olika sätt kan du placera en boll i en låda?

   (b) På hur många olika sätt kan du placera alla bollar i lådorna?

3. I matsalen är 6 personer från grupp 1 först på plats för att äta lunch. På hur många olika sätt kan de ställa sig i kö?

4. Fem elever ska välja ut två stycken som ska städa efter kvällsfikat. På hur många olika sätt kan de göra detta?

5. På mattekollo ska deltagarna i Ellens patrull (9 st) ordna ett spex.

   (a) Till detta behövs en manusskrivare, en hjälte och en fiende. På hur många olika sätt kan de välja ut dessa personer?

   (b) När de bestämt dessa roller behöver de också utse tre stycken statister bland de som är kvar. På hur många olika sätt kan de göra detta?

6. Kevin ska anställa robotar till sin matteproblemsfabrik. Han har 7 intresserade robotar och 4 arbetsroller att anställa.

(a) På hur många olika sätt kan Kevin anställa robotarna om alla arbetsroller är helt olika?

(b) På hur många olika sätt kan Kevin anställa robotarna om alla arbetsroller är likadana?

7. Det är tio elever på idrotten som ska turas om att spela olika bollsporter. Fyra stycken ska spela volleyboll. På hur många olika sätt kan man välja dessa elever?

Definition. **Fakultet** $n!$ (utläses n-fakultet) definieras som

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$$

Till exempel är $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.

8. Räkna följande problem utan miniräknare.

(a) $4!$

(b) $6!/3!$

(c) $5!/(5-2)!$

(d) $101!/99!$

9. På hur många olika sätt kan man kasta om bokstäverna

(a) KOL

(b) KOLL

(c) MATTEKOLLO

Extrauppgifter

10. En kväll ska det spelas Avalon på Matte- och Programmeringskollo. Det är 10 deltagare. Bland dem finns en Merlin, en Percival, en Oberon, tre vanliga onda och resten vanliga goda. På hur många sätt kan rollerna fördelas?

11. Linn har med sig 7 spel till Mattekollo. På hur många sätt kan hon välja ut några av dem och lägga dem i en hög? (Ordningen på spelen inom högen är viktig.)

12. På hur många sätt kan man kasta om bokstäverna i ordet HUNDAR så att både vokalerna och konsonanterna var för sig kommer i bokstavsordning?

13. Kevin ska fortfarande anställa 4 robotar av 7 ansökande, men nu visar det sig att bara 2 av robotarna klarar av en utav arbetsuppgifterna. De övriga tre arbetsuppgifterna är alla olika och alla robotar kan fortfarande göra dem. På hur många sätt kan Kevin nu anställa robotarna?

14. På hur många sätt kan 12 personer dela upp sig i 6 par?

15. **(a)** På hur många sätt kan du permutera en lista med n objekt?

(b) På hur många sätt kan du välja k objekt från en samling av n objekt?

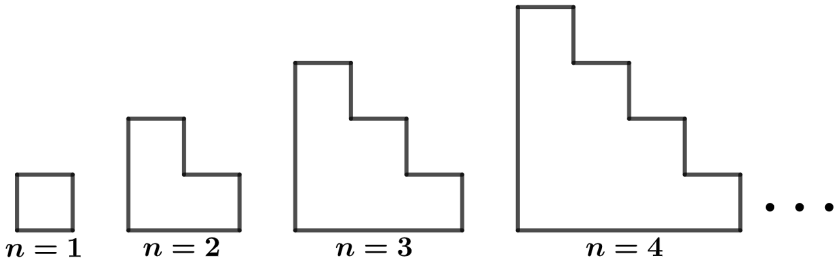
16. På en hylla står 12 böcker på rad. På hur många sätt kan man välja 5 av dem så att inga två av de valda står intill varandra?

4. Visuella bevis II

17:e juli

4.1 Arean av en trappa

Med en n-trappa så menas en trappa med n trappsteg där varje trappsteg är en 1×1-kvadrat. Bilden nedan visar en 1-trappa, en 2-trappa, en 3-trappa och en 4-trappa.



Besvara följande frågor i par. Rita en bild till varje fråga som motiverar ert svar.

1. Vad är omkretsen av en 5-trappa? en 10-trappa? en 20-trappa?
2. Vad är arean av en 5-trappa? en 10-trappa? en 20-trappa?
3. Hur många fler rutor finns det i en n-trappa än en $n-1$-trappa?
4. Vad har störst area? En n-trappa eller en rätvinklig triangel med bas $n-1$ och höjd $n-1$?
5. Vad har störst area? En n-trappa eller en rätvinklig triangel med bas $n+1$ och höjd $n+1$?
6. Vad har störst area? En 50×50-kvadrat eller en 49-trappa och en 50-trappa tillsammans?
7. Stämmer följande sats? Testa att sätta in $n = 1,\ n = 2, \ldots$ och se om det blir rätt.

Sats 4.1. Arean av en n-trappa är $\dfrac{n(n+1)}{2}$.

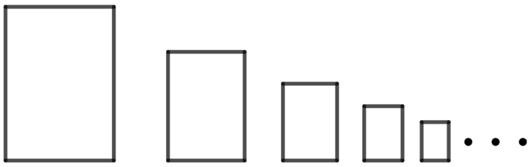
8. Bevisa Sats 4.1 visuellt. Använd $n = 8$ i beviset, men se till att det går att generalisera till andra trappstorlekar.

4.2 Extrauppgifter

9. Carl Friedrich Gauss var en tysk matematiker som levde på 1800-talet. I skolan fick han och hans klasskamrater i uppgift att addera alla tal från 1 till 100. Läraren förväntade sig förstås att detta skulle ta väldigt lång tid, men till hennes förvåning fann Gauss svaret nästan omedelbart. Vad svarade han?

10. William spelar Terraforming Mars (ett superbra brädspel). I väntan på sin tur bygger han en trappa av alla sina silverkuber (Megacredits). Sedan raserar han trappan och bygger en kvadrat av alla kuberna istället. Hur många Megacredits har William som minst?

11. Dela ett A4 i hälften så får du ett A5. Dela det igen så får du ett A6, o.s.v. Alina har oändligt många papper — ett A4, ett A5, ett A6, o.s.v. Hur stor area har alla Alinas papper tillsammans?



12. Bevisa följande sats visuellt:

Sats 4.2. Summan av de n första udda talen är n^2.

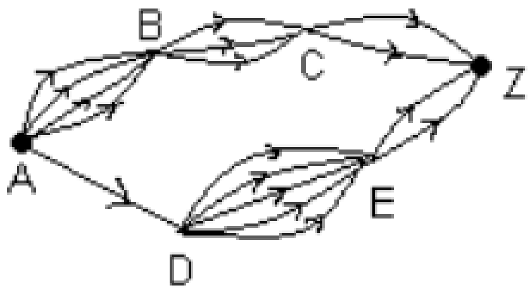
13. Till sin lektion har Ivar klippt ut 100 trappor: en 1-trappa, en 2-trappa, en 3-trappa, o.s.v. Varannan av dessa trappor har har målat röd och varannan har han målat blå. Varje ruta av trapporna kräver 1 mg färg att måla. Hur mycket mer blå färg än röd färg behöver Ivar?

5. Kombinatorik III

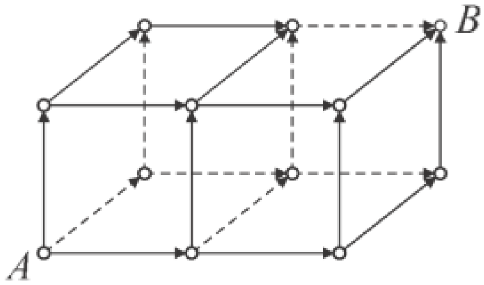
18:e juli

1. 1.

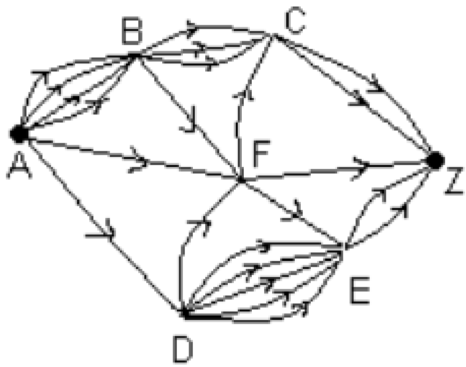
2. 1.



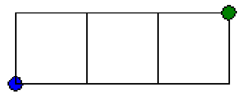
3. 1.



4. 1.

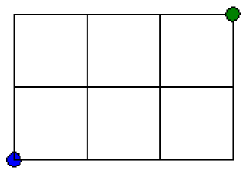


5. **(a)**



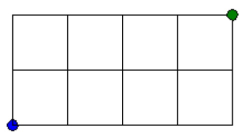
(b) Kevin har fyra havrekuddar som ligger på en rad. På hur många olika sätt kan Kevin välja att äta exakt en utav dessa fyra?

6. **(a)**



(b) Ellen är i mataffären och ska köpa rapsolja. På en hylla står det fem flaskor rapsolja. På hur många sätt kan Ellen köpa med sig två av dessa flaskor hem?

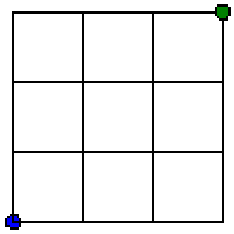
7. **(a)**



(b) Kevin och Linn står framför whiteboarden. Kevin har skrivit sex stycken minustecken på tavlan, men Linn tycker detta är alldeles för negativt. Hon bestämmer sig därför för att rita två steck till så att två av minustecknena blir plustecken. På hur många olika sätt kan Linn göra detta?

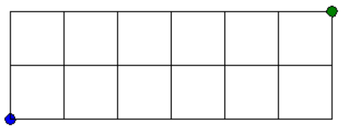
(c) Linn tycker fortfarande att det är alldeles för negativt så hon suddar ut de streck hon ritat dit och ritar istället ut fyra nya. På hur många sätt kan hon göra detta?

8. **(a)**



(b) Kevin har 10! kikärtor som han har lagt i en ganska stor bunke. Sedan startar Kevin sin mixer och gör hummus av alla kikärtor. Han häller i lite kryddor (inklusive ganska mycket spiskummin) och fördelar sedan hummusen i 6 olika burkar. Han vill ge hälften av dem till Valentina som en gåva. På hur många sätt kan Kevin göra detta?

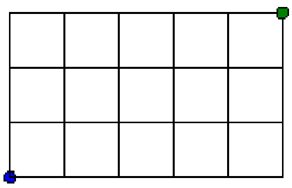
9. **(a)**



(b) Valla folkhögskola har 8 hemliga trappor som Ellen har upptäckt. Dessa vill hon därför såklart provspringa för att se vad som finns högst upp. På hur många sätt kan Ellen välja två av dessa trappor att springa upp för?

(c)

10. **(a)**

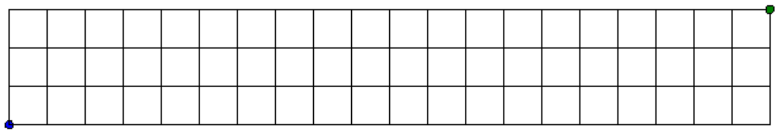


(b) De hemliga trapporna var jätteroliga att springa upp för och Ellen vill nu visa dessa för Linn. Denna gång vill de dock springa upp för tre av de hemliga trapporna. På hur många olika sätt kan de göra detta?

11. Ser du något samband mellan svaren på fråga a och fråga b i uppgift 6-11? Kan du förklara detta samband?

Extrauppgifter

12. 1.



13. Kan du rita ett rutnät likt rutnäten i de tidigare uppgifterna som har lika många vägar genom sig som följande problem:

”Linn har tio mjölkpaket i sin kyl och är väldigt törstig. På hur många olika sätt kan hon välja att dricka upp tre utav dem?"

14. På hur många sätt kan man kasta om bokstäverna i ordet HUNDAR så att både vokalerna och konsonanterna var för sig kommer i bokstavsordning?

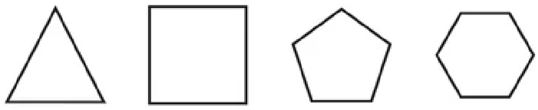
15. På hur många olika sätt kan du välja k objekt av n möjliga om ordningen du väljer dem i inte spelar någon roll?

6. Visuella bevis III

18:e juli

6.1 Regelbundna polygoner

En *polygon* är figur med raka sidor. En polygon kallas *regelbunden* om alla sidor är lika långa och alla vinklar är lika stora.



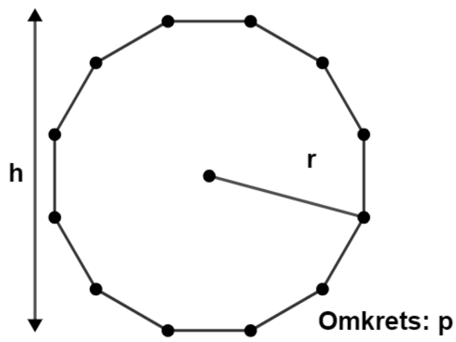
Exempel på regelbundna polygoner

6.2 12-hörningens area

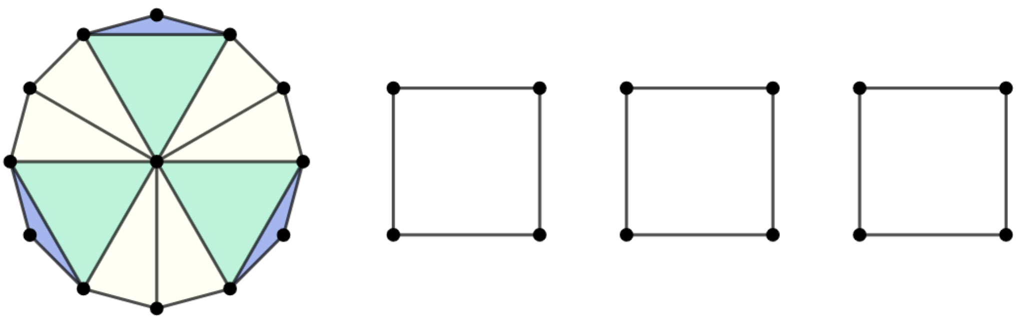
Lös följande svåra uppgifter i grupper om två eller tre personer. Använd pappersformerna till er hjälp!

1. Betrakta en regelbunden 12-hörning. Låt p vara dess omkrets och h vara dess höjd. Visa att 12-hörningens area är

$$\frac{p \times h}{4}.$$



2. Betrakta en regelbunden 12-hörning. Låt r vara avståndet från 12-hörningens mittpunkt till någon av dess hörn. Visa att 12-hörningens area är $3r^2$.



Bevis som lurar

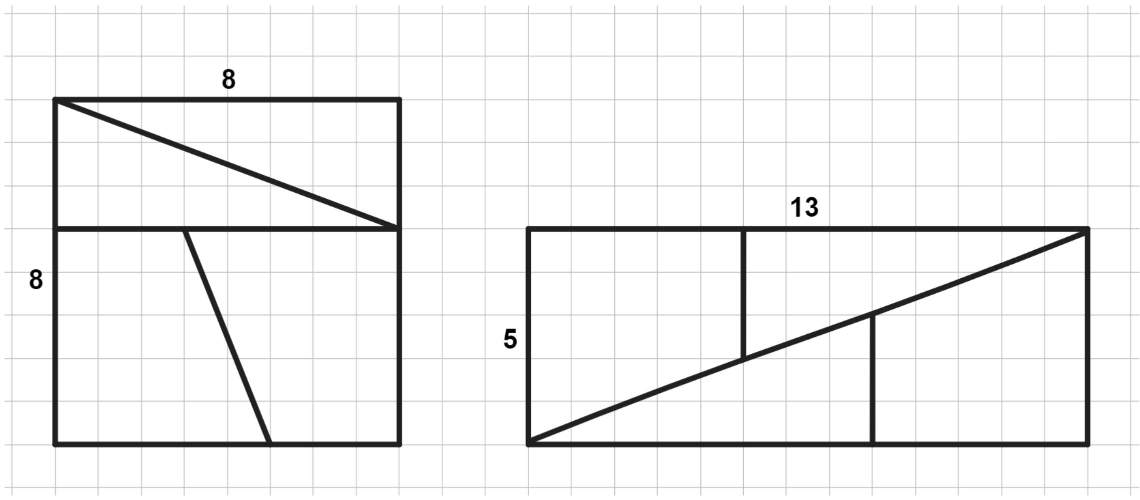
Poängen med bevis är ju att reda ut vad som är sant. Men ibland kan man faktiskt luras med bevis. Kan du hitta felen i följande bevis?

Påstående:

$8 \times 8 = 5 \times 13$.

Bevis:

En 8×8-kvadrat kan delas upp i fyra bitar, som sedan kan arrangeras om för att bilda en 5×13-rektangel som på bilden. Kvadraten och rektangeln har alltså samma area, vilket innebär att $8 \times 8 = 5 \times 13$. ■



Påstående:

$\pi = 4$

Bevis:

1. Rita en cirkel med radie 1 i en kvadrat med sidlängd 2. Cirkelns omkrets blir då 2π och kvadratens omkrets blir $2 \times 4 = 8$.

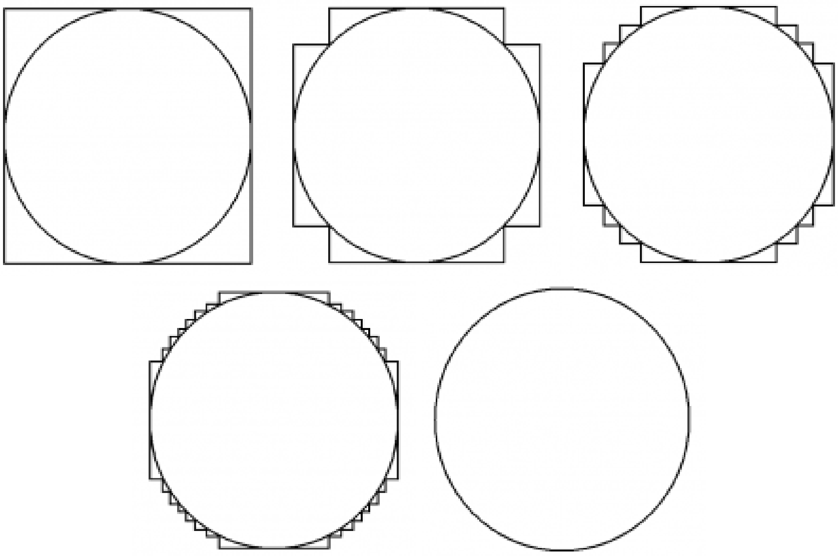
2. Vik ihop kvadratens hörn så att de nuddar cirkeln. Detta förändrar inte före detta kvadratens omkrets.

3. Fortsätt vika ihop kvadraten så att den närmar sig cirkeln.

4. Efter oändligt många steg så blir kvadraten till en cirkel. Men kvadratens area förändrades aldrig. Alltså har kvadraten och cirkeln samma omkrets, därav

$$\begin{aligned} 2\pi &= 8 \\ \iff \pi &= 4. \end{aligned}$$

■



Påstående:
$\pi < 3,111\ldots$

Bevis

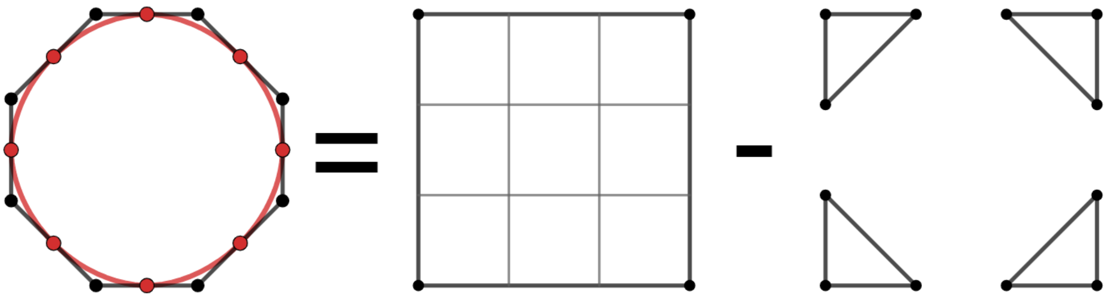
1. Rita en cirkel med radie 1. Arean av cirkeln blir då π.
2. Rita en oktagon runt cirkeln som på bilden.
3. Lägg till fyra trianglar runt oktagon så att den blir en 2×2-kvadrat.
4. Arean av oktagon blir då

$$\begin{aligned}&\text{kvadratens area} - 4 \times \text{trianglarnas area}\\&= 4 - 4 \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3}\\&= 4 - \frac{8}{9}\\&= 3,11111\ldots\end{aligned}$$

5. Cirkeln är mindre än oktagon, därav

$$\pi < 3,1111\ldots,$$

vilket skulle visas. ∎



7. Talteori I

20:e juli

Definition. Om ett tal A ger rest 0 vid division med B så är A jämnt delbar med B. Man kan skriva $B \mid A$ "B delar A". Ex: 6 är delbar med 3 eftersom $\frac{6}{3} = 2$ rest 0.

1. Vilka av följande tal är jämnt delbara med 2? 3? 5?

(a) 7

(b) 12

(c) 20

(d) 138

(e) 7320

(f) 36435

(g) 92871

2. Vilka av följande tal är jämnt delbara med 6?

(a) 18

(b) 25

(c) 48

(d) 102

(e) 52764

(f) 36435

(g) 92871

Vad gäller för att ett tal ska vara delbart med 6?

3. **(a)** Om ett tal är delbart med 4 och 5, är det då delbart med 20? Vad gäller för att ett tal ska vara delbart med 20? Varför?

(b) Om ett tal är delbart med 3 och 6, är talet då delbart med 18? Vad gäller för att ett tal ska vara delbart med 18? Varför?

(c) Om ett tal är delbart med 4 och 6, är talet då delbart med 24? Vad gäller för att ett tal ska vara delbart med 24? Varför?

Definition. Rest r är definierat så att r alltid är icke-negativ. Om vi delar A på B och gäller: $A = B \cdot n + r$ då $0 \leq r < B$ och n är ett heltal. Ex: 11 har rest 1 vid division med 5 eftersom $11 = 5 \cdot 2 + 1$

4. Dividera med rest, det vill säga, bestäm både rest och kvot:

(a) $\frac{1000}{9}$

(b) $\frac{9}{1000}$

(c) $\frac{0}{37}$

(d) $\frac{-17}{5}$

5. Vilken rest kan man få som mest om man delar något med 1000?

6. Vilka tal ger rest 1 vid division med 11?

7. Finn delbarhetsregler för 7 och 11 på samma sätt som vi gjorde för delbarhet med 3.

8. På vanliga analoga klockor tar det 12 timmar för den korta visaren att färdas ett varv. Vem har egentligen bestämt att det ska vara så? Här är ett exempel på en 13-timmars-klocka där ett varv för den korta visaren tar 13 timmar.

(a) Hur kan man räkna ut resten vid division med 13 med en 13-timmarsklocka

(b) Kan man räkna ut resten vid division med 14 med en 7-timmarklocka?

(c) Kan man räkna ut resten vid division med 5 med en 10-timmarsklocka?

(d) Den coola 5-timmarsklockan visar kl1. Vad visar den om 323 timmar?

9. Man dividerade ett visst tal med 13 och sedan samma tal med 15. Kvoten blev lika i båda fallen. Första gången blev det 8 i rest, andra gången blev det ingen rest. Vilket tal var det man delade?

10. Man har tillgång till mynt med valörerna 14 respektive 35 kronor. Kan man på något sätt betala summan 2015 kronor med sådana mynt?

11. Visa att

(a) summan av 3 på varandra följande heltal är delbar med 3.

(b) summan av 5 på varandra följande heltal är delbar med 5.

(c) Visa för vilka n som summan av n på varandra följande heltal är delbar med n.

Extrauppgifter

12. Bevisa följande:

(a) Talet a + 1 är delbart med 3. Visa att talet 4 + 7a också är delbart med 3.

(b) Talen (2 + a) och (35 - b) är delbara med 11.

Visa att talet a + b också är delbart med 11.

13. Glassbilen har paket med 3, 6, 9 eller 37 piggelin-isglassar. En festarrangör vill ha exakt 50 paket med sammanlagt 400 piggelin-glassar. Går det?

14. Under kombinatorik-lektionerna har ni lärt er att räkna ut antal kombinationer. Ett exempel är: *antal sätt att välja ut 3 utav 15 brädspel att spela*. Generellt kan man skriva att antalet kombinationer att välja k saker från ett antal av n är

$$\text{Antal kombinationer} = \frac{n!}{(n-k)!k!} \tag{7.1}$$

Om n=15 och k=3 enligt exempeluppgiften, får vi alltså

$$\text{Antal brädspelskombinationer} = \frac{15!}{(15-3)!3!} = \frac{15 \times 14 \times 13}{3 \times 2 \times 1} \tag{7.2}$$

1. Förklara varför detta är en generell formel för antal kombinationer
2. Förklara hur det kommer sig att du får hela antal kombinationer när du använder formeln för att lösa exempeluppgiften?
3. Visa med hjälp av formeln varför kombinationer alltid är heltal.

15. Rektangulära chokladkakor består av kvadratiska rutor. Chokladkakan måste vara minst 2 rutor bred och 2 rutor höjd. Kan en sådan kaka bestå av 17 rutor? Av 91 rutor? För vilket antal rutor kan man inte skapa en sådan chokladkaka?

16. I tre högar ligger stenar: 51, 49, respektive 5 stenar. Man får lägga ihop två högar till en, samt dela upp en hög med ett jämnt antal stenar i två lika stora. Kan man få 105 högar med en sten i varje? (kolla på denna!)

8. Logik I

20:e juli

1. Avgör vilka av följande uttryck som är påståenden:
   1. 3.
   2. Jag är en människa.
   3. Matematik gillar att äta.
   4. 37 och böcker.
2. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna:
   1. Jorden är platt.
   2. Månen är ett ägg.
   3. Talet 541 är udda.
   4. $\frac{441}{7} < 62$.
3. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna:
   1. Det finns en blond tjej i klassrummet och den personen är ledare på mattekollo.
   2. Vissa katter har morrhår eller hundar är en sorts katt.
   3. $11 = 3$ och $11 \neq 3$.
   4. $11 = 1 + 10$ eller $11 = 1 + 10$.
4. Avgör vilka av följande påståenden som är varandras motsatser:
   1. Det regnar. – Solen skiner.
   2. John har drömt om katter fyra nätter i rad. – John drömde inte om katter minst en natt de senaste fyra nätterna.
   3. Det finns bara 7 sorters djur. – Det finns 8 eller fler sorters djur.
   4. Inga katter bor i Eriksberg. – Det bor en katt i Eriksberg.
5. Formulera matematiska motsatser till följande meningar:
   1. Imorgon blir det fint väder.
   2. Alla katter talar sanning.
   3. $7 \geq 3$

4. Det finns inga katter som vet vad det innebär att vara kriminell.

6. Omformulera följande påståenden så att inget av påståendena innehåller "ingen"eller "inte":

1. Inte alla grisar är smarta.
2. Inte alla ledare är veganer.
3. Det kan vara så att inte alla av Sveriges befolkning tror att jorden är platt.
4. Ingen här inne vet att inte alla robotar har känslor.

7. På Apornas planet bor det apor och människor, där bägge arterna kan prata. Varje invånare på planeten talar antingen alltid sanning, eller ljuger alltid. Om vi har individerna A och B som säger följande saker, vilken sort och art är de?

1. A: “Minst en av oss är en apa”, B: “Minst en av oss ljuger”
2. A: “Vi är båda apor”, B: “Vi båda ljuger”
3. A: “B är en apa som ljuger, jag är en människa”, B: “A talar sanning”

Extrauppgifter

8. En natt är fyra djurvänner ute och går på ett led i skogen; Åsnan, Lejonet, Papegojan, och Giraffen. Åsnan ljuger alltid, Lejonet talar alltid sanning, Papegojan upprepar det svar den hört senast (om den får första frågan svarar den slumpmässigt “ja” eller “nej”), Giraffen svarar det korrekta svaret på sin föregående fråga (på sin första fråga svarar den slumpmässigt “ja” eller “nej”). De träffar på den kloka Igelkotten, som inte kan se i vilken ordning de går. Igelkotten vet hur djuren svarar, och bestämmer sig för att ta reda på ordningen genom att ställa frågor till dem. Den frågar alla i tur och ordning “Är du Åsnan?”, och kommer då endast fram till var Giraffen står. Därefter frågar den alla i samma ordning “Är du Giraffen?”, och kommer då endast fram till var Åsnan står. Tredje gången frågar den alla i samma ordning “Är du Papegojan?”. Det första djuret svarar ja, och Igelkotten utbrister triumferande “Nu vet jag hela ordingen!”. I vilken ordning gick djuren?

9. Talteori II. Primtalsfaktorisering

21:a juli

Definition. Ett *primtal* är ett positivt heltal större än 1 som inte är delbart med något annat positivt heltal än 1 och sig själv.

1. Vilka av talen är primtal?
(a) 4
(b) 11
(c) 90
(d) 27
(d) 57
(d) 2

2. Ringa in alla primtal ≤ 100. Fundera på hur du kan göra det på ett effektivt sätt.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Definition. Alla tal kan *primtalsfaktoriseras* genom att skrivas som en produkt av enbart primtal. T.ex: $20 = 2 \cdot 2 \cdot 5$

3. Multiplicera tre valfria primtal < 10. Vad är primtalsfaktoriseringen av talet?

4. Vi undersöker likheten $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$.

1. Vilka är primtalsfaktorerna av 30?

2. Kan man primtalsfaktorisera 30 på något annat sätt?

5. Skriv följande tal som en produkt av primtal (dvs primtalsfaktorisera talen)
(a) 15
(b) 12
(c) 100
(d) 242
(f) 10 000 000

6. Vilka primtal är 10! delbart med?

7. Hur många tal kan man dela talet 210 med? (dvs finna alla delare till talet)

8. För att undersöka om ett tal är ett primtal kan man se om det är delbart med något tal mindre än det (utom 1). Vilket är det minska antalet tal man behöver pröva att dela med?

9. Multiplicerar man 4 olika tal som alla är större än 1, så får man 2024. Vilka är de 4 talen?

10. Vi delar in talen $1, 2, \ldots, 10$ i två grupper sådana att produkten av alla talen i den första gruppen är delbar med produkten av alla talen i den andra gruppen. Vilket är det minsta värdet som kvoten av den större gruppen och den mindre gruppen kan ha?

11. Skriv talet 111 som en summa av några heltal (inte nödvändigtvis olika) så att deras produkt också blir 111.

12. Man multiplicerade ett tal med var och en av dess siffror. Resultatet blev 1995. Vilket var det ursprungliga talet?

Extrauppgifter

13. En pappa har två barn. Han berättar att om man lägger ihop produkten av deras åldrar med summan av deras åldrar så får man talet 76. Hur gamla är barnen?

14. (a) Hur många delare har de första fem kvadrattalen: 1, 4, 9, 16 och 25?
(b) Hur beror antalet delare till ett tal av talets primtalsfaktorisering?
(c) Vilket samband finns mellan antalet olika delare hos ett tal och egenskapen att det är ett kvadrattal?

> **Definition.** Två tal är *relativt prima* om det inte finns något tal större än 1 som delar båda talen. T.ex: 5 och 6 är *relativt prima* eftersom det inte finns något tal större än 1 som delar både 5 och 6.

15. Kan man placera sju olika positiva heltal på en cirkel, så att vilka som helst två tal bredvid varandra har en gemensam delare, medan vilka som helst två tal som inte är bredvid varandra är relativt prima?

10. Logik II

21:a juli

Under den här lektionen besöker vi en ö. På ön bor två sorters människor: Sanningssägare (sådana människor talar alltid sanning) och lögnare (som alltid ljuger).

1. Du har precis anlänt till ön och frågar en öbo vilken sort de är. Vad kommer de att svara?

2. Du vill ha fler svar och frågar alla öbor vid stranden. Var och en av dem säger: ”Alla andra öbor på stranden är lögnare.”. Hur många sanningssägare finns på stranden?

3. På promenaden genom staden hör du en dialog mellan öborna Eyvind och Julia. Eyvind säger till Julia: ”Åtminstone en av oss är en sanningssägare”. Julia svarar: ”Du är lögnare!”. Vem av dem är av vilken sort?

4. Efter lunchen går du ut i trädgården, där öborna stod och pratade i grupper. En av gruppen bestod av Axel, Elias och Hartvig. Du undrar vilka sorts människor de är, varpå Elias svarar ”Vi är alla lögnare.” och Hartvig säger ”Bland oss finns bara en sanningssägare.”. Kan du bestämma vem som är vad?

5. Du går till en annan grupp där öborna Adam, Elton och JJ står och frågar Adam: ”Är du en lögnare eller en sanningssägare?” Han svarar men sluddrar samtidigt, så du kan inte höra vad han säger, så du frågar JJ: ”Vad sade Adam för något?” varpå JJ säger ”Adam sade att han var en lögnare.”. Då gav sig Elton in i samtalet: ”Tro inte på JJ, han ljuger!”. Bestäm vilka sorter JJ och Elton är.

6. Till den tredje gruppen som består av Lucia, Mohammad, Rachel och Emma ställer du frågan: ”Hur många sanningssägare finns det bland er?” Lucia svarar: ”Vi är alla lögnare”, Mohammad svarar: ”Vi har exakt en lögnare bland oss”, Rachel: ”Det är exakt två lögnare bland oss”, Emma: ”Jag har aldrig ljugit och ljuger inte just nu heller.”. Kan du bestämma vad Emma är för sorts människa?

7. När du promenerar vidare möter du öborna Mikhail, Ossian och Tatiana och frågar dem: ”Hur många sanningssägare finns bland dina medföljande?”. Mikhail svarar: ”Inte en enda”, Ossian svarar: ”En”. Vad svarar Tatiana?

8. Du är mycket intresserad av undulater och stöter på en öbo. Vilken fråga ska du ställa till de för att ta reda på om det finns undulater på ön?

9. Öborna är nu misstänksamma på dig eftersom du ställer så mycket frågor, så de fångar dig och bestämmer sig för att äta upp dig. Du får dock välja hur du blir tillagad. Du får säga en mening och om den är sann, så blir du stekt med paprika och om det är falskt så blir du kokt med buljong. Vad borde du säga för mening?

10. Du undrar hur många öbor det finns på ön totalt. Några öbor påstår att det finns ett jämnt antal sanningssägare på ön, medan alla andra öbor påstår att det finns ett udda antal lögnare på ön. Är det då ett jämnt eller ett udda antal öbor på ön?

11. När du tar dig fri kommer du till en uppvisning där 16 öbor ställer sig i rutorna på en 4×4-kvadrat som är ritad i sanden. Var och en av de säger: ”I alla rutor som gränsar till min med sidan står det lögnare”. Vilket är det största antalet lögnare som kan finnas bland öborna i kvadraten?

11. Talteori III. Multiplar och delare

22:a juli

Definition. En *multipel* av heltalet m är ett tal på formen mn där n är ett heltal.

Definition. *Minsta Gemensamma Multipel (MGM)* av två tal A och B är det minsta tal som är en multipel till både A och B.

Definition. *Största Gemensamma Delaren (SGD)* av två tal A och B är det största tal som både A och B är jämnt delbar på.

1. Beräkna MGM och SGD hos talen:

1. 3 och 6
2. 12 och 16
3. 560 och 490
4. 2^5 och 4^3

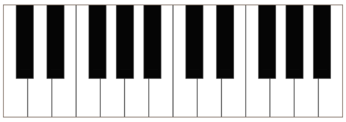
2. Vad gäller för två tal vars MGM är samma som produkten av talen? Vad är då deras SGD?

3. Räkna följande bråk genom att använda MGM:

1. $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$
2. $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$
3. $\frac{5}{4} + \frac{5}{6}$
4. $\frac{7}{315} - \frac{5}{150}$

4. Ellen äter rostade solroskärnor så ofta som var fjärde dag medan William bara gör det var sjätte dag. Hur ofta äter de rostade solroskärnor samtidigt?

5. Ett piano har 88 tangenter. Du börjar med ett spela tonen längst ner med vänsterhanden, och tonen brevid med högerhanden. Vänsterhanden och högerhanden spelar samtidigt var 6:e not och högerhanden var 7:e not.



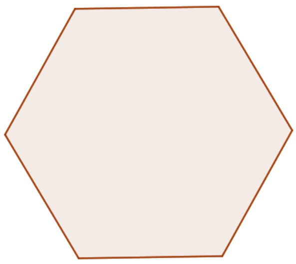
På vilken tangent kommer båda händerna först att ha spelat?

6. Två formel1-bilar tävlar i en 15km lång bana. Topphastigheten för en formel1-bil är runt 375km/h men de här formel1-bilarna är lite slitna och kör runt banan med sin maxhastighet på 252km/h resp. 360km/h.

1. Hur lång tid efter att bilarna är bredvid varandra är de det igen?
2. Efter hur många varv korsar de start- och mållinjen samtidigt?

7. Mattekollodeltagarna som vi säger är 35 tjejer och 25 killar ska delas in i lag inför en mattetävling. Lagen ska vara lika stora och med lika antal tjejer och killar i varje lag. Hur många lag går det att göra?

8. Dela in en hexagon i åtta likadana lika stora delar.



Extrauppgifter

9. Visa att om ett tal har exakt tre delare, så är det ett kvadrattal. Ge ett exempel på ett sådant tal. (Ett kvadrattal är ett tal som kan skrivas som n^2 då n är ett heltal)

10. Det sitter 16 nissar runt ett bord och målar. Varje gång någon nyser skickar de sina mästerverk 3 nissar åt höger och fortsätter måla på det mästerverk de har framför sig.

1. Visa att alla nissar får måla på allas mästerverk innan någon målar 2 gånger på samma.
2. Skulle samma sak hända om de skickade sina mästerverk 5 nissar åt höger
3. Skulle samma sak hända om de skickar sina mästerverk 10 nissar?
4. För vilka antal nissar åt höger kan de skicka sina mästerverk så att alla nissar får måla på allas mästerverk innan någon målar 2 gånger på samma?

12. Logik III

22:a juli

1. Avgör om följande implikationer är sanna eller falska:

   1. Erika är brevbärare $\implies$ Erika har ett jobb
   2. Erika har ett jobb $\implies$ Erika är brevbärare
   3. Vi är på Mattekollo $\implies$ Det är sommar
   4. Det regnar ute $\implies$ Det är molnigt
   5. Det är molnigt $\implies$ Det regnar ute
   6. Sveriges huvudstad heter Stockholm $\implies$ Vi är på mattekollo

2. Avgör om följande implikationer är sanna eller falska:

   1. Jag har inte varit i Oslo $\implies$ Jag har inte varit i Norge
   2. Jag har inte varit utanför Oslo $\implies$ Jag har inte varit utanför Norge
   3. John är inte pank $\implies$ John har inga pengar
   4. Minst en häst i Valla är röd $\implies$ Alla hästar i Valla är gröna eller någon annan färg

3. Avgör om följande slutledningar är sanna eller falska:

   1. Jag har en kudde. Alla kuddar är mjuka. Alltså äger jag minst en mjuk sak.
   2. Hermans tröja är grön. Alltså gillar Herman gröna saker.
   3. Solen skiner alltid i Linköping. Solen skiner idag. Alltså är vi i Linköping idag.
   4. x är större än 10. x är mindre än y. Alltså är $\frac{y}{2}$ större än 3.

4. Kal och Ada ska spela fotboll. Kal säger att alla sporter är roliga och att matematik är roligt. Alltså drar Kal slutsatsen att matematik är en sport. Ada säger att Kal har fel. Vem är det som har rätt? Hur skulle vi kunna omformulera påståendet så att det blir rätt?

5. Antag att $A \implies C$ och $C \implies B$ är sant. Är $A \implies B$ sant eller falskt?

6. När det regnar sitter katten i köket eller källaren. Om katten är i köket så sitter råttan i hålet och osten är i kylskåpet. Om osten är på bordet och katten är i källaren så är råttan i köket.

   1. Just nu regnar det och osten är på bordet. Var är råttan?

2. Det regnar och råttan är i hålet. Var är osten?

3. Det är inte sant att osten är på bordet och katten är i källaren. Kan råttan vara i köket?

7. Visa att $A \implies B$ är sant om och endast om "(inte A) eller B" är sant.

Extrauppgifter

8. Oleg har en gammal våg som inte fungerar som den ska. Om någonting väger mindre än 1000g visar vågen korrekt men om något är tyngre eller väger precis 1000g kan vågen visa vad som helst över 1000g. Vi har 5 vikter A, B, C, D och E och alla väger under 1000g. När man väger dem i par visar vågen följande:

- $B + D$ – 1200g
- $C + E$ – 2100g
- $B + E$ – 800g
- $B + C$ – 900g
- $A + E$ – 700g

Vilken vikt är tyngst?

9. På en marknad samlas 25 personer från tre städer, Kil, Grums och Forshaga. De från Kil talar alltid sanning och alla från Grums ljuger alltid. Invånarna i Forshaga talar sanning varannan gång och ljuger varannan gång oberoende av varandra. När alla på torget får frågan: "Är du från Kil?", svarar 17 "Ja". När alla därefter får frågan: "Är du från Forshaga?", svarar 12 "Ja". När till sist alla får frågan: "Är du från Grums?", svarar 8 "Ja". Hur många på torget är från Kil?

13. Talteori IV. Kryptering

23:e juli

Alfabetets konvertering till tal

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

S	T	U	V	W	X	Y	Z	Å	Ä	Ö
19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29

1. När man använder Caesarchiffer räknar man med rester.

1. Ge exempel på tal som ger samma rest vid division med 3.
2. Ge ett uttryck för alla tal som ger samma rest vid division med 3.

2. Översätt följande meddelanden till krypterad kod med 3-stegsförskjutet Caesarchiffer

1. HEMLIGT
2. PRIMTAL
3. AVALON ÄR BÄST

3. Avläs följande stegförskjuten kod då B=-3
QSX PÅHBO YO LYKAIFDÅ: JYKPHIFD ARJEBQ LÖE RKFSBOPRJ, LÖE GÅD YO FKQB PYHBO MX ABQ ÅKAOÅ / ÅIÄBOQ BFKPQBFK

4.
1. Visa att stegförskjutning med 30 och 59 ger samma krypterad text, med hjälp av begreppet rest.
2. Vilka olika stegförskjutningar kan kryptera B till E med Caesarchiffer?

5. Vad översätts MATTE till om

1. stegförskjutningen är 1?
2. stegförskjutningen är 32?
3. stegförskjutningen är 325?

6. Ge exempel på tre olika stegförskjutningar som man inte kan använda på Caesarchiffer för att en vokal (AEIOUYÅÄÖ) ska avkodas till en annan vokal?

7. Översätt följande till multiplikativt krypterad kod med hjälp av krypteringsnyckel 5, och dekryptera tillbaks det igen.

1. CHIFFER
2. OBOY

3. 2024 (Det finns 2 sätt att göra detta på. Fundera på vilka olika sätt)

8. Kryptera ett hemligt meddelande med högst 5 ord till en kompis och ge över krypteringsnyckeln, och be hen dekryptera meddelandet.

9. Kryptera och dekryptera BUSIGT med multiplikativ kryptering

1. och krypteringsnyckel 3.
2. och krypteringsnyckel 4.

10. För att undersöka val av krypteringsnyckel, byter vi till engelskans alfabet med 26 bokstäver. Vi krypterar alltså inte Å, Ä och Ö och antal tecken som krypteras är 26 stycken. *Tips: Detta problem liknar uppgift 10 från Talteori 3. Har du fastnat så kan du kolla på den upptifen först*

1. Kryptera och dekryptera PASTA med krypteringsnyckel 3
2. Beräkna MGM(3, 26)
3. Kryptera och dekryptera PASTA med krypteringsnyckel 2
4. Beräkna MGM(2, 26)
5. Varför fungerar inte alla värden på krypteringsnycklar för alfabet på 26 bokstäver och varför fungerar alla krypteringsnycklar för alfabet på 29 bokstäver?
6. Hur påverkar MGM(krypteringsnyckel, antal bokstäver) huruvida det går att dekryptera ett kodat meddelande på ett unikt sätt?
7. Vilka värden på krypteringsnyckel kan vi inte använda för ett alfabet på 26 bokstäver om man vill att den dekrypterade koden ska vara unik?

11. För att koda siffror större än 9 som ett enda tecken kan man använda sig av bokstäver (lägger man till bokstäverna A-F får man ett hexadecimalt system). Hur skulle 1 3 6 9 12 15 översättas i så fall med

1. caesarkryptering med förskjutning B=3
2. multiplikativ kryptering

12. Man kan kombinera Caesarchiffer med multiplikativ kryptering så att man först stegförskjuter det man vill få krypterat och därefter multiplicerar med krypteringsnyckeln. Mottagaren behöver då både ett stegförskjutningstal och en multiplikativ krypteringsnyckel för att kunna dechiffrera koden. Testa att skriva ett kort meddelande på detta sätt och försök därefter att dechiffrera det.

14. Logik IV

23:e juli

1. Vi har följande påståenden, som kan vara sanna eller falska:

- R: Det Regnar.
- Ö: Katten är i köket.
- Ä: Katten är i källaren.
- H: Råttan är i hålet.
- K: Råttan är i köket.
- B: Osten är på bordet.
- Y: Osten är i kylen.

Skriv följande påståenden symboliskt:

1. När det regnar sitter katten i köket eller källaren.
2. Om katten är i köket så sitter råttan i hålet och osten är i kylskåpet.
3. Om osten är på bordet och katten är i källaren så är råttan i köket.

2. Vad vet man om variablerna om $A \implies (B \implies C)$ är sann? Vad vet man om variablerna om $(A \implies B) \implies C$ är sann?

3. Vilka av följande rader är tautologier och vilka är osatisfierbara?

1. $A \wedge \neg A$
2. $A \vee \neg A$
3. $A \implies \neg A$
4. $\neg A \implies A$

4. Visa att $\neg(A \wedge B)$ är sant om och endast om $\neg A \vee \neg B$ är sant. Visa att $\neg(A \vee B)$ är sant om och endast om $\neg A \wedge \neg B$ är sant.

5. Vad vet man om variablerna om $A \wedge B \vee C$ är sann?

6. Följande gäller:

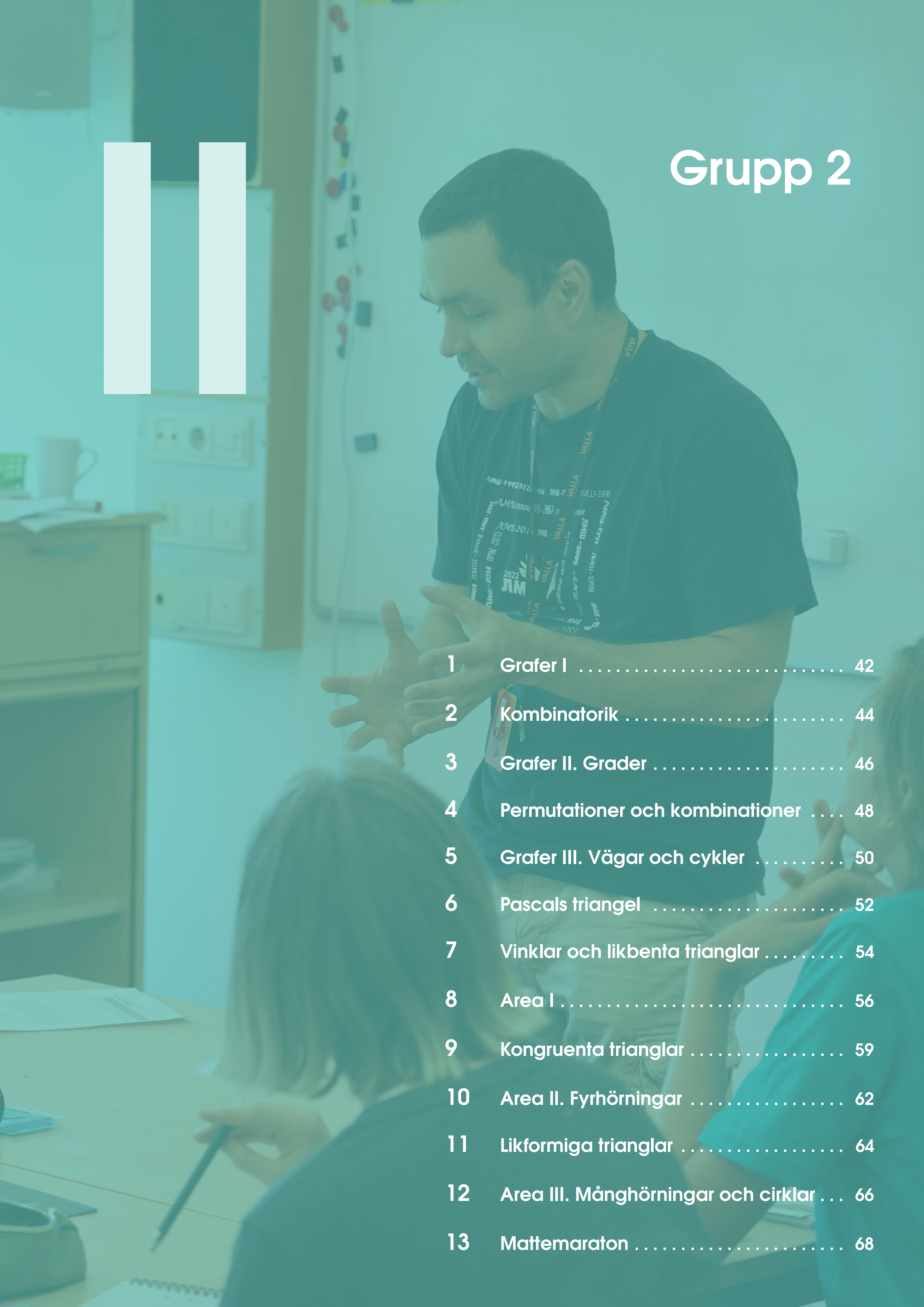
- $\neg A \implies \neg B$
- $C \vee (D \wedge \neg A)$
- $B \implies (B \implies C)$

- $A \vee (D \wedge B)$

Vad vet vi om variablerna?

7. Kan du lägga till två av symbolerna $\implies$, $\wedge$, D, $\vee$, A och B nedan så att A blir sann och B, C och D blir falska?

- $\neg A \vee C \implies (\neg D \vee B) \wedge D$
- $C \wedge A \implies \neg C \vee B$
- $\neg B \vee D$
- $\neg D \vee \neg A$



II

Grupp 2

1. Grafer I

16:e juli

1. I en galax långt, långt borta finns det följande kollektiva rymdfärdslinjer: Coruscant-Tatooine, Kashyyyk-Dantooine, Coruscant-Kashyyyk, Kashyyyk-Tatooine, Tatooine-Dantooine, Endor-Onderon, Onderon-Corellia, Corellia-Naboo, Naboo-Kamino, Kamino-Endor. Går det att resa kollektivt från Coruscant till Endor?

2. Två siffror känner varandra om ett tvåsiffrigt tal som de bildar är delbart med 3. Finns det en vänskapskedja från siffran 1 till siffran 9?

3. Tänk på ett 4×4-bräde utan alla hörnrutor. Kan springaren (hästen) börja på någon ruta, besöka alla rutor en gång och komma tillbaka till den ursprungliga rutan?

4. Landet "7:an"har 15 städer och det går minst 7 bilvägar ut från varje stad (till någon annan stad i landet). Visa att det går att åka bil mellan två valfria städer i detta land.

5. Leonid hävdar att han kan skriva ett 9-siffrigt tal som består av siffror $1, \ldots, 9$ så att varje två på varandra följande siffror skapar ett 2-siffrigt tal som är delbart med 7 eller 13. Är Leonid lite för självsäker?

6. I en graf har alla noder antingen svart eller vit färg. Varje svart nod är anknuten till 5 svarta och 10 vita, och varje vit nod är anknuten till 10 svarta och 6 vita. Vilka noder finns det mest av, svarta eller vita?

7. Ellen ritade en regelbunden femhörning och placerade tre sorters mynt i dess hörn med valörer 1, 2 och 10. I ett drag kan hon ta ett mynt och skicka det över till valfri hörn som inte är granne till den befintliga. Kan hon göra så att efter några sådana drag, 10-an ligger på sin plats men 1-an och 2-an har bytt platser med varandra?

8. I hörnrutorna på 3×3-brädet står det två vita och två svarta springare (hästar). Hur kan man få de svarta och vita springarna att byta plats med varandra om man endast får flytta dem enligt schackreglerna? Hur många drag kommer det att krävas som minst för att genomföra detta byte?

9. Spionerna organiserade sig på så sätt att ingen kommunicerar med fler än tre andra spioner men att det går att skicka meddelande till vem som helst genom att använda högst en länk. Alltså alla kan kommunicera med alla genom en bekant spion. Vad kan högsta antal spioner i detta nätverk vara?

10. Bevisa att i varje grupp av sex Mattekollo deltagare finns det antingen tre som alla känner varandra eller tre som inte känna varandra alls (dvs ingen känner ingen).

Extra uppgifter

11. Trafikbolaget vill etablera 10 nya busslinjer och dess hållplatser på så sätt att för varje 8 busslinjer finns det en hållplats som inte tillhör någon av dem men att varje 9 busslinjer täcker alla nya hållplatser.

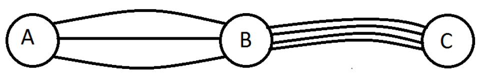
12. Kan man placera talen från 0 till 9 i en cirkel på så sätt att alla par av granntal har 3, 4 eller 5 som differens?

2. Kombinatorik

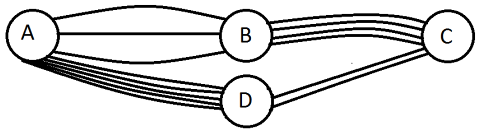
16:e juli

Kombinatoriska uppgifter handlar om att räkna antal av något: objekt, sätt, riktningar, m.m. Ofta är det stora mängder som behöver räknas, så det är väldigt svårt att gå genom alla objekt och räkna dem individuellt.

1. Från staden A till staden B finns det 3 olika vägar. Från staden B till staden C finns det 4 olika vägar. På hur många sätt kan man resa från staden A till staden C?

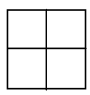


2. I samma land finns även staden D, till vilken det leder 5 olika vägar från A och 2 från C. På hur många sätt kan man resa från staden A till staden C?



3. Man kastar ett mynt tre gånger och skriver sedan ner resultaten av alla kast (t.ex: krona, klave, krona). Hur många olika sådana resultat kan man få?

4. På hur många sätt kan man färga några av rutorna i en 2×2 tabell i svart?



5. På hur många sätt kan man välja en kapten och en vicekapten för ett lag av 6 personer i en mattedrabbning?

6. I Storbritannien och USA brukar man skriva datum genom att ange månad först (som sedan följs av talen för datumens dag och år), men i de flesta andra länder anger man dag först. Hur många dagar i år måste man specificera vilken stil man använder när man skriver datumet för att vara säker på att det är just den dagen man menar?
(t.ex. 12-11-2024 kan betyda både 12:e november och 11:e december)

7. Eleverna på mattekollo kallar ett tal "fet" om det består av endast udda siffror.

   (a) Hur många 4-siffriga "feta" tal finns det?

   (b) Hur många 5-siffriga tal som inte är "feta" finns det?

8. **(a)** På hur många sätt kan man välja 4 kort av olika valörer från en full kortlek (som består av 52 kort, med 13 valörer och 4 färger)?

(b) På hur många sätt kan man välja 4 kort av olika valörer och olika färger från en full kortlek?

(c) På hur många sätt kan man välja 4 kort från en full kortlek så att det finns åtminstone två kort av samma valör bland dem?

9. Efter varje genomgång på mattekollot, brukar elever uttala sin förvåning med hjälp av tre vokaler (o, y och ä). Varje skrik av förvåning kan bestå av upp till tre vokaler. På hur många olika sätt kan elever på mattekollot uttala sin förvåning?

10. Ett schacktorn slår alla rutor som ligger i samma rad och i samma kolumn. På hur många sätt kan man placera 8 torn på ett schackbräde så att inget torn slår ett annat torn?

11. På hur många sätt kan man välja 3 öron att dra i från 4 människor så att att ingen blir dragen i båda öron?

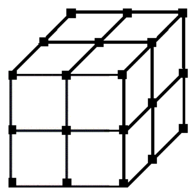
Extra uppgifter

12. Ellen skriver ned på tavlan alla 4-siffriga tal som är delbara med 4. Leonid anser att siffror som är större än 4 för komplicerade för andra gruppen och därför suddar han bort alla tal som innehåller 5, 6, 7, 8 eller 9. Hur många tal kommer det att finnas kvar på tavlan när de är klara?

13. Tobias räknar endast tal som inte har lika siffror på varandra följande platser (t.ex. 112398 eller 922377 blir inte godkända, men 989767 är OK). Hur många tal kommer han att räkna upp till 1000000?

14. Vilket tal får man om man summerar alla 3-siffriga tal som består av siffrorna 1, 2, 3 och 4?

15. På hur många sätt kan man välja tre hörn på ett $3 \times 3 \times 3$-rutnät (se bilden) så att dessa hörn inte alla ligger på samma rät linje?



3. Grafer II. Grader

17:e juli

1. Antal kanter som går ur en nod i en graf kallas för denna nods *grad*. Går det att konstruera en graf vars noders grader är som följer nedan?

(a) 9, 8, 8, 7, 6, 6, 3, 2, 1;

(b) 8, 8, 7, 7, 6, 5, 4, 2, 1;

(c) 8, 7, 6, 5, 4, 4, 3, 2, 1;

(d) 8, 7, 5, 4, 4, 3, 2, 2, 2?

Hur många kanter finns det i en sådan graf?

2. På Mattekollots första dag blev alla ledare förutom Leonid osams med olika antal ledare (dvs inga två var osams med samma antal ledare). Med hur många ledare bråkade Leonid?

3. Alla deltagare på mattekollot har lyckats skaffa sig två kompisar bland de andra deltagarna. Hur många vänskaper har det blivit?

4. I landet Ingenstans finns det 100 städer; varje stad är kopplad till fyra andra städer med tågbanor. Hur många tågbanor finns det sammanlagt i landet Ingenstans?

5. 7 dvärgar bestämde sig för att bygga gångvägar mellan deras 7 hus på så sätt att tre gångvägar kommer ut från varje hus. Dessvärre hur de än ritar en plan, så fungerar det inte. Skulle du kunna hjälpa dem?

6. **(a)** På Mattekollot anordnas en turnering i Go, där det registrerades sammanlagt 9 deltagare. Varje deltagare får spela exakt fem gånger varpå man kommer att räkna poäng och utse två bästa spelare till final. Skriv ett schemaförslag för turneringen.

(b) Går det att anordna en sådan turnering om man räknas som utslagen (och får inte fortsätta) efter att ha förlorat sina första tre matcher?

7. Bevisa att summan av graderna av alla noder i en graf alltid är lika med det dubbla antalet kanter.

8. Bland 67 av alla 68 elever på Mattekollo har 21 elever exakt 5 vänner var, 27 elever har 6 vänner var och 40 elever har 7 vänner var. Bevisa att några av dessa elever måste vara vän med den 68:e eleven.

9. För att lösa en matematisk uppgift byggde Valentina en modell av en geometrisk figur där varje hörn anknyts till tre andra hörn. Hon räknade ut att denna figur hade hela 100 kanter. Kan du ge ett exempel av en sådan figur eller finns det anledning att tvivla Valentinas räkneförmåga?

10. *(Handskakningslemmat)* Bevisa att antal människor i sällskapet som gjorde ett udda antal handskakningar alltid är jämnt.

Extra uppgifter

11. Varje dag samlas fyra av arton deltagare från andra gruppen för att spela Hanabi tillsammans. Kan det hända att vid något ögonblick har varje elev deltagit i ett spel med andra elever en och endast en gång?

12. Bland 20 elever som deltagit på lektionen i grafteori lyckades varje elev spela ett mobilspel mot åtminstone 14 andra elever under lektionstid. Det enda vi vet om detta spel (förutom att det gör otroligt mycket ljud) är att det är två spelare som ställs mot varandra. Visa att det finns 4 elever som spelade detta spel mot varandra.

13. I en sagostad är varje korsning ett vägskäl, det vill säga, det är en korsning av tre vägar samtidigt. Alla vägar är färgade i tre olika färger på så sätt att vid varje korsning möts vägar av alla tre färger. Det finns bara tre vägar som går ut från staden, visa att alla tre har olika färger.

4. Permutationer och kombinationer

17:e juli

1. Strax efter första lektion på Mattekollot upptäckte Leonid att eleverna lämnade klassrummet väldigt stökigt.

(a) En elev måste nu väljas som en syndabock för Leonids utskällning och en annan får städa upp stöket. På hur många sätt kan man välja dessa två?

(b) Det visade sig att stöket var så pass illa att det krävs tre elever för att städa det. På hur många sätt kan man välja dessa tre elever?

2. Eleverna från andra gruppen lyckades tjuvkika i Fredriks dator och skrev ned samtliga siffror av den (inte-längre-så) hemliga 6-siffriga koden från Skattjakten innan den började. Dessvärre minns de inte ordning på siffrorna, men tack och lov så var alla siffror i koden olika (det var 1, 2, 3, 4, 5 och 6). Hur många koder behöver de testa för att säkerställa att de använder den rätta?

3. Det finns ett 2D-plan med 10 punkter. Det går inte att dra en rät linje genom tre av dem, vilken trea man än väljer. Hur många trianglar med hörn enbart i dessa punkter kan man rita?

4. Hur många sträckor kan man dra mellan 100 punkter på 2D-planet?

5. **(a)** På hur många sätt kan man välja ordning för n olika objekt? (det kallas även för *permutationer*)

(b) På hur många sätt kan man välja en sekvens av k objekter från n givna? (ett *ordnad urval*).

(c) På hur många sätt kan man välja uppsättning av k objekter från n givna? (ett *oordnad urval* eller *kombination*).

6. Två lag av fyra deltagare ska spela schack med varandra. Vid varje omgång måste en deltagare från ena laget möta en deltagare från andra laget. På hur många olika sätt kan man skriva ett schema för en omgång?

7. Ellen har en låda med glassklassiker där det ligger två nogger, en piggelin, en sandwich, en 88-a och en päronsplitt. Hon tänker välja fyra av dessa för att mumsa på idag men vill absolut ha minst en nogger bland dem. På hur många olika sätt får hon välja en sådan uppsättning av fyra glassar?

8. Emil har fem legendariska pokémonkort, Axel har åtta som är lite mer vanligt förekommande. Emil tänker därför byta två av sina kort mot fyra av Axels kort. På hur många sätt kan de genomföra denna utbyte?

9. Hur många olika ord kan man sammansätta från bokstäver i följande ord(en)...

(a) DUMHET,

(b) DUMMA,

(c) DUMBOM,

(d) DUMMA MIG,

(e) KLOKA ELEVER?

10. På hur många sätt kan man fördela gruppen i två lag för mattedrabbning så att lagen blir lika stora?

11. Hur många olika pärlband kan man sammansätta från 12 olika pärlor?

12. På hur många olika sätt kan man skriva bokstäver i ordet "PLACERING" så att både vokaler och konsonanter står i lexikografisk ordning (dvs, bokstäver är skrivna i samma ordning som de befinner sig i alfabetet)?

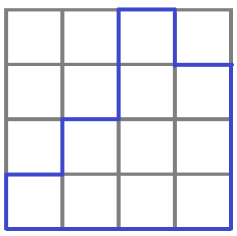
Extra uppgifter

13. Välj 6 punkter på planet på så sätt att det finns exakt 17 trianglar som har sina hörn i dessa punkter.

14. Leonid tycker att han får granska alldeles för många lösningar på intagningsprovet och därför har han kommit på ett system att minska sin arbetsbelastning. Han lägger alla proven på hög först, varpå flera av dem som ligger högst upp kastas i en papperskorg. Sedan väljer han ett slumpmässig antal som ligger högst upp till första gruppen, och fortsätter i samma andan tills fjärde gruppen som fylls på med resterande bidrag. Hur många olika resultat kan det bli om man följer denna procedur? (Tänk på att grupperna inte får vara tomma och papperskorgen får inte vara det heller då Leonid är hemskt lat.)

15. På hur många sätt kan man välja fem böcker från tolv böcker som står i rad om man inte får välja på varandra följande böcker?

16. Räkna antal olika slutna (dvs där sista sträcka slutar där första sträckan börjar) polygontåg som man kan rita på ett $n \times n$ ruttnät, där polygontåg måste gå genom varje av n horisontella och n vertikala linjer som skapar ruttnätet och bestå av $2n$ sträckor. Bilden nedan utgör ett exempel av ett sådant 10 sträckor lång polygontåg för ett 5×5 rutnät.



5. Grafer III. Vägar och cykler

18:e juli

En *väg* är en sekvens av kanter, där varje nästföljande kant böjar i hörn där föregående kant avslutade.

En *cykel* är en väg som påbörjar och slutar i samma hörn.

En väg som innehåller varje kant i grafen exakt en gång kallas för en *Eulerväg*.

Eulercykel är en *Eulerväg* som påbörjar och slutar i samma hörn.

1. Ivar bestämde sig att åka varje bilväg som finns i landet. Han började i Stockholm och slutade i Linköping utan att ta någon väg två gånger. Han har också tagit en sväng i Göteborg för att lära sig uttala ordet "Kex" på ett korrekt sätt. Visa att

(a) Det finns ett jämnt antal bilvägar som går ut från Göteborg

(b) Det finns ett udda antal bilvägar som går ut från Linköping och Stockholm.

2. Det finns en skärgård där öarna är förbundna med broar så att man kan ta sig från varje ö till vilken annan ö som helst. Tage har lyckats samtliga öarna genom att gå över varje bro exakt en gång. På ön Trelliot har Tage varit tre gånger. Hur många broar leder från Trelliot om Tage

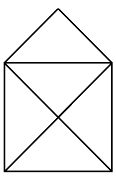
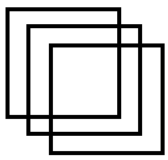
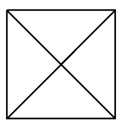
(a) varken började eller slutade där;

(b) började där men inte slutade där;

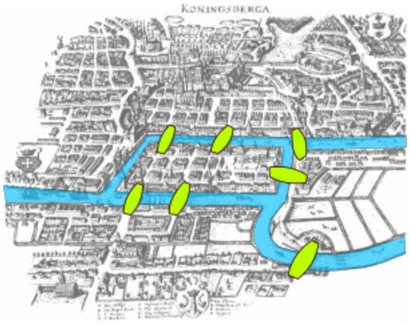
(c) började där och slutade där?

3. Linn byggde en stad i Minecraft och vandrade på dess 6 gator. Hon lyckades att besöka alla gator exakt två gånger men kunde inte hitta en väg genom alla gator som besöker varje gata bara en gång. Kan man verkligen bygga en sådan stad eller hade Linn fel?

4. Går det att rita följande figurer utan att lyfta pennan och rita över befintliga linjer?

(a)  **(b)**  **(c)** 

5. Leonhard Euler under sin promenad i Königsberg (nuvarande Kaliningrad) började fundera på om det går att vandra genom staden på så sätt att man besöker varje bro en och endast en gång (se stadens karta med broar på bilden nedan).



6. Man ritade 10 cirklar i planet på så sätt att det går att vandra från en valfri cirkel till alla andra utan att lämna dessa cirklar helt. Visa att det går att rita dessa cirklar på så sätt att man inte behöver lyfta pennan och rita över befintliga linjer.

7. Visa att alla kanter i en graf där noder endast har jämna grader kan fördelas i ett antal cykler på så sätt att varje kant tillhör exakt en cykel.

8. **(a)** Visa att i en graf där noderna endast har jämna grader finns det en Eulercykel.

   (b) Visa att i en graf där två noder har udda grader och resten av noderna är av jämna grader finns det en Eulerväg.

Extra uppgifter

9. Vilket är det minsta antal delar som man måste såga en metalltråd av längden 120 cm i för att kunna tillverka en kub med sidan 10cm?

10. Visa att det finns ett sätt att skriva en sekvens av 82 siffror så att varje tvåsiffrigt tal som inte är delbart med 10 är skapad av något par av intilligande siffror.

11. På varje kolumn och varje rad av ett schackbräde står det minst 2 torn. Går det alltid att ta bort några torn så att det står exakt 2 torn i varje kolumn och i varje rad?

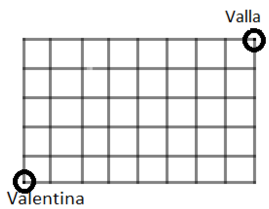
6. Pascals triangel

18:e juli

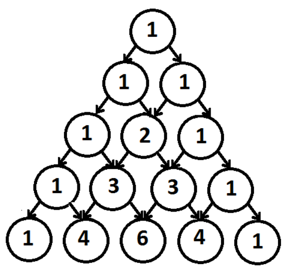
1. På hur många sätt kan man läsa ut ordet ”KVADRAT” om man börjar på K och sedan går snett nedåt höger eller snett nedåt vänster tills man kommer till ett T?

K
V V
A A A
D D D D
R R R R R
A A A A A A
T T T T T T T

2. Varje dag under Mattekollo reser Valentina från Linköping där hon övernattar tillbaka till Valla på grund av sin familjesituation. Leonid brukar söka upp henne redan under resans gång och ställa någon dum fråga om översättning av sina uppgifter till svenska. Detta vill Valentina såklart undvika och därför ritade hon en karta av vägar från Linköping till Valla och bestämde sig för att hitta så många möjliga olika sätt att resa som det bara går. Hur många resrutter finns det (ta hänsyn till att Valentina bara vill resa mot universitet och aldrig tänker röra sig i motsatt håll, dvs nedåt eller åt vänster)?



3. Pascals triangel är en sådan figur där på varje radnummer n står det $n+1$ tal. Dessa tal motsvarar antal sätt att gå ner från toppen till där just detta tal står, och betecknas med $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \ldots, \binom{n}{n}$ (se bilden nedan, läses: n välj 0, 1, osv). Bevisa



följande enkla fakta om denna triangel:

(a) Alla talen längst till vänster och längst till höger är 1. ($\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$).

(b) Alla andra tal i Pascals triangel är summa av tal som står till vänster och till höger om talet på raden ovanför. (för att $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$)

(c) Summan av alla talen på någon rad är 2^n där n är radens nummer.

4. En trappa består av 10 trappsteg. Man vill ta sig hela vägen ner från toppen och det är tillåtet att hoppa över flera trappsteg (även skippa allihoppa). På hur många sätt kan man ta sig ned?

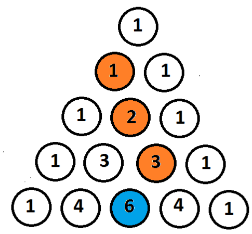
5. Det finns oändligt många tal i Pascals triangel. Vissa ser man flera gånger: 1 finns två gånger på varje rad, 6 finns på 4:e och två gånger på 6:e rad, osv. 2-an däremot ser man bara en gång - på 2:a rad.

(a) Finns det ett positivt heltal som inte är med någonstans i Pascals triangel?

(b) Ser man talet $1+2+3+\ldots+2023$ på 2024:e raden i Pascals triangel?

6. Förekommer det något tal som är delbart med 2017 i en tidigare rad än rad 2017:e i Pascals triangel?

7. Pascals triangel underlättar att visualisera olika intressanta förhållanden mellan $\binom{n}{k}$-talen. T.ex. om man väljer ett valfritt tal i Pascals triangel, så är summan av talen i föregående högra diagonal som slutar precis ovanför till höger av detta tal (orangefärgade talen på bilden) lika med det utvalda talet (blå). Bevisa detta.



8. Visa att i en rad i Pascals triangel så är summan av talen på jämna platser lika med summan av talen på udda platser. Kan du skriva ett enkelt uttryck för denna summa?

Extra uppgifter

9. Finns det något heltal större än 1 som förekommer fler än 4 gånger i Pascals triangel?

10. Bevisa att $\binom{n}{m} \cdot \binom{m}{k} = \binom{n}{k} \cdot \binom{n-k}{m-k}$ med hjälp av Pascals triangel (du kan naturligtvis anta att $0 \leq k \leq m \leq n$).

11. Bevisa att $\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \ldots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}$.

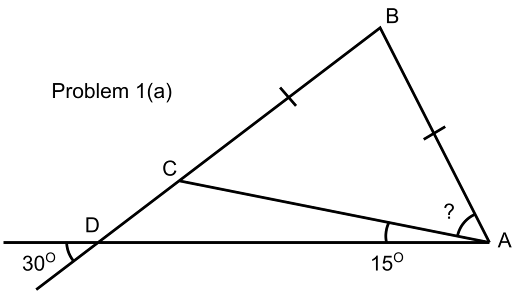
12. Visa att det inte förekommer några udda tal förutom första och sista ettan på rad 2^n (dvs, på raderna 2, 4, 8, 16, osv).

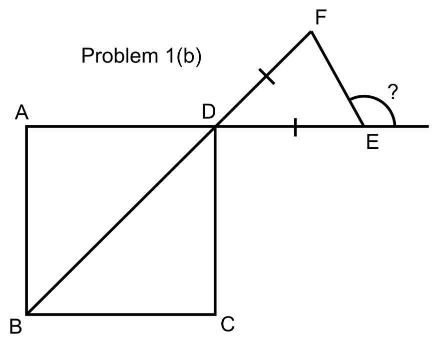
7. Vinklar och likbenta trianglar

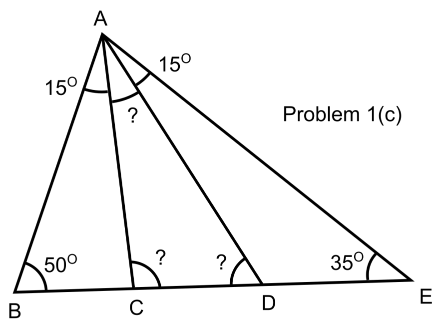
20:e juli

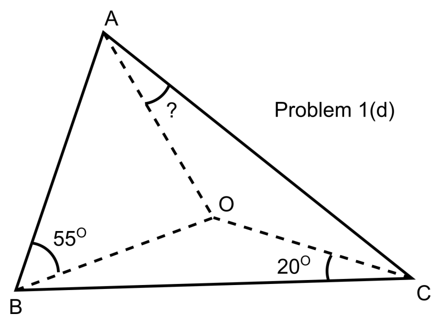
Några saker ni kan dra nytta av är

1. att vinkelsumman i en triangel är 180°
2. att $AB^2 + BC^2 = AC^2$ i en rätvinklig triangel ABC
3. att en triangel ABC är likbent ($AB = BC$) om och endast om $\angle A = \angle C$
4. att en triangel ABC är liksidig om och endast om alla vinklar är lika med 60°
5. att i ett parallellogram $ABCD$ är motstående sidor parallella.









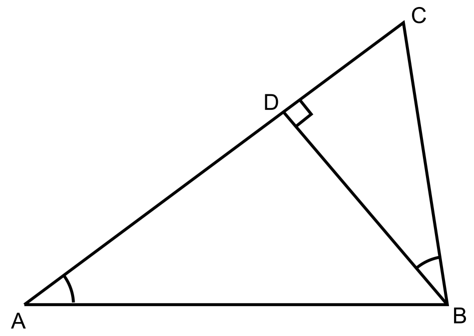
1. Räkna ut de okända vinklarna i figurerna ovan. Du vet att

1. $AB = BC$
2. $ABCD$ är en kvadrat och $DE = DF$
4. $AO = BO = CO$.

2. I en triangel är $2 \cdot \angle A = 3 \cdot \angle B = 6 \cdot \angle C$. Vad är triangelns vinklar?

3. I en likbent triangel ABC är $AB = BC$. Låt D ligga på AB så att $\angle ACD = \angle BCD$. Vinkeln ADC är 150°. Räkna ut $\angle B$.

Amnärkning. När en linje delar en vinkel i två lika stora vinklar kallas den för *bisektris*. I problem 3 är CD bisektrisen till vinkeln ACB.

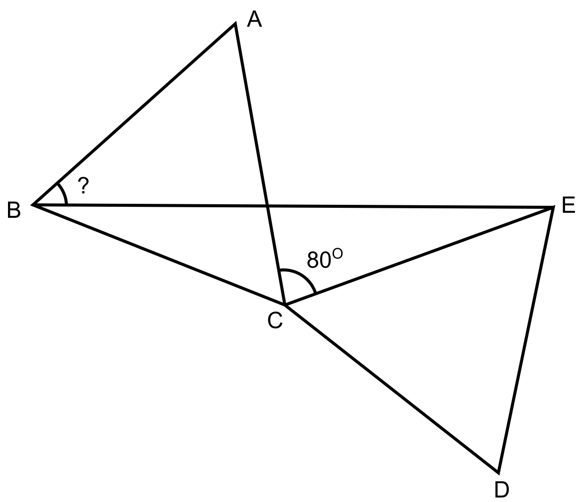


4. I en triangel ABC är $AB = AC$. Låt BD vara en av höjderna. Visa att $2 \cdot \angle CBD = \angle BAC$.

5. Låt ABC vara en rätvinklig triangel. Visa att hypotenusan är dubbelt så lång som en av kateterna om och endast om en av vinklarna är 30°.

6. Låt $ABCD$ vara ett parallellogram, d v s är AB och CD är parallella och $AD = BC$. Visa att om AC är bisektrisen vid $\angle A$ så är $AB = BC$.

7. Låt AB vara en sträcka med mittpunkt M och låt C vara en punkt i planet. Visa att om $\angle CMA = 90°$ så är $CA = CB$.



8. Låt ABC och CDE vara två lika stora liksidiga trianglar. Hur stor är vinkeln ABE om vinkeln ACE är lika med 80°?

Extraproblem

9. Låt $ABCD$ vara en kvadrat. Låt ABM vara en liksidig triangel som ligger i kvadraten. Räkna ut vinkel CMD.

10. Låt ABC vara en triangel. Höjderna från A och B skär varandra i en punkt H. Bisektriserna till A och B skär varandra i K. Låt $\angle AKB = 130°$ och $\angle AHB = 130°$. Räkna ut $\angle ABC$.

8. Area I

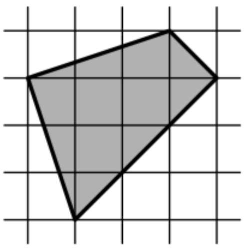
20:e juli

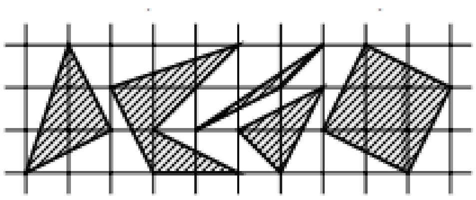
För varje figur M i planet låt oss säga att **arean** är ett tal S_M med följande egenskaper:

- Arean kan inte vara negativ, dvs $S_M \geq 0$,
- Areorna av två likadana figurer är lika: $S_M = S_N$ om $M = N$,
- Består figuren M av två figurer A och B som inte har gemensamma punkter inuti (dvs inte på gränsen), så är figuren Ms area lika med summan av areorna av A och B, $S_M = S_A + S_B$,
- Arean av en $k \times l$-rektangel är lika med kl (bredden multiplicerat med längden).

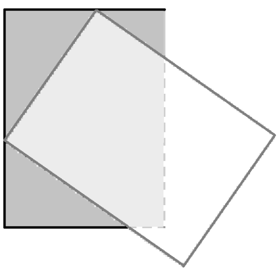
1. Visa att arean av en rätvinklig triangel är lika med hälften av produkten av dess kateters längder. (Hur gör man om det enda man kan är att beräkna arean av en rektangel?)

2. Räkna ut areorna av figurerna på bilderna nedan. Svara i antalet rutor.





3. Ett pappersblad är täckt av ett annat pappersblad av samma storlek, på ett sådant sätt att två av det andra pappersbladets hörn ligger på det första pappersbladets sidor (se bilden nedan). Vilken del av det första pappersbladet har störst area, den som är täckt eller den som är synlig?



4. Visa att ...

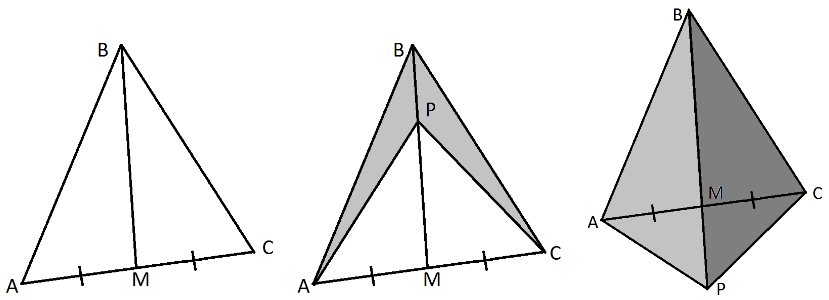
   (a) ... arean av en spetsvinklig triangel är lika med hälften av produkten av valfri sidas längd och höjden som är dragen till denna sida. (Sidan kallas för *basen* i detta sammanhang.)

   (b) ... föregående påstående stämmer för alla trianglar.

5. Hur stor area kan en triangel ha som störst om den har två sidor vars längder är 7 och 10?

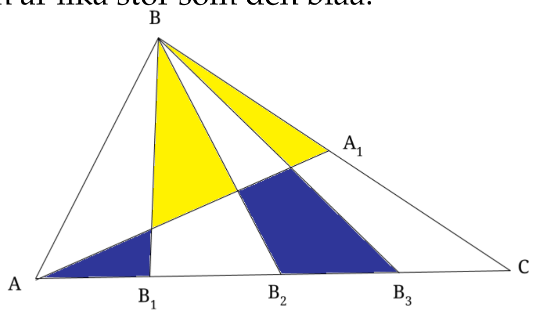
6. Visa att en median delar triangeln i två trianglar med lika stora areor. Lägg märke till att det omvända också stämmer. (En sträcka dragen till motsatt sida, som delar triangeln i två lika stora trianglar, är en *median*.)

7. I en triangel ABC är BM en av triangelns medianer. En punkt P ligger på linjen BM. Visa att $S(ABP) = S(CBP)$.



8. En *mittlinje* i en triangel är en sträcka som ansluter två av sidornas mittpunkter. Visa att en mittlinje skär av en mindre triangel vars area är en fjärdedel av den stora triangelns area.

9. I triangeln ABC nedan är punkten A_1 mittpunkten på sidan BC, medan punkterna B_1, B_2 och B_3 delar upp sidan AC i fyra lika långa sträckor. Visa att den gula arean är lika stor som den blåa.



10. **(a)** Två medianer av triangeln ABC, AK och BL skär varandra i punkten O. Visa att areorna av trianglarna AOL och BOK är lika stora.

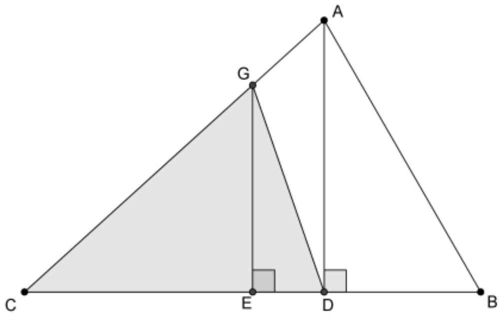
(b) Låt M vara mittpunkten på tredje sidan (AB) av triangeln ABC. Drar man sträckan OM, så fördelas triangeln i 6 mindre trianglar: AOM, BOM, BOK, COK, COL, AOL. Visa att de alla har lika stora areor.

(c) Visa att alla tre medianer av en godtycklig triangel skär varandra i en punkt. Denna punkt delar medianernas längder i förhållandet 2:1.

Extra uppgifter

11. Finns det en triangel med höjder som är 1 cm, 2 cm respektive 3 cm långa?

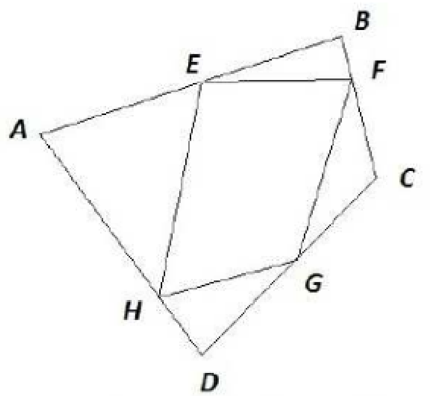
12. Visa att triangeln CGD och fyrhörningen $DGAB$, där E är mitten på BC, har samma area:



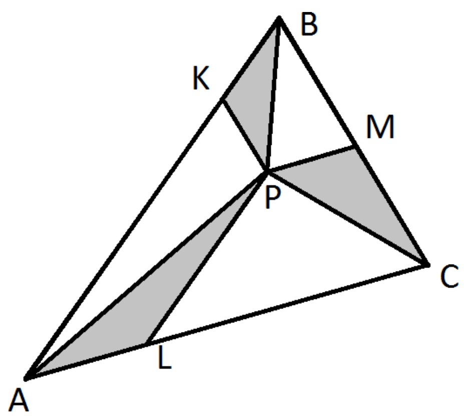
13. På fyrhörningen $ABCD$s sidor har man satt ut punkterna E, F, G, H så som bilden visar så att $AE = BE$, $DG = GC$, $2BF = FC$ och $AH = 2HD$. Hur stor andel av $ABCD$:s area utgör arean av

(a) …sexhörningen $AEFCGH$?

(b) …fyrhörningen $EFGH$?



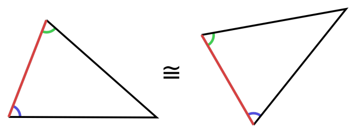
14. Punkterna K, L och M ligger på sidorna AB, BC och AC av triangeln ABC, och P ligger inuti denna triangel på så sätt att $KP||BC$, $LP||AB$, $MP||AC$. Bestäm alla punkter P för vilka $S(APL) = S(BPK) = S(CPM)$ också gäller (och förklara varför det inte finns några andra svar).



9. Kongruenta trianglar

21:a juli

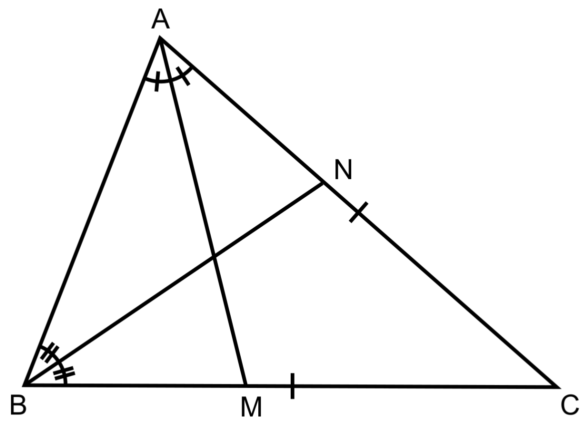
9.1 Vinkel–sida–vinkel



Två trianglar är kongruenta om två vinklar och den mellanliggande sidan är lika stora i de båda trianglarna.

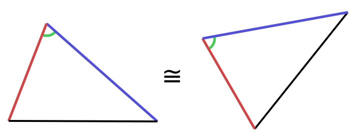
1. Låt ABC vara en triangel, så att BD dels är en bisektris, dels en av höjderna. Visa att $AB = BC$.

2. Två sträckor AB och CD är parallella och lika stora. Linjerna AC och BD skär i en punkt O. Visa att punkten O delar AC i två lika långa sträckor.



3. I en triangel ABC är $AC = BC$. Låt AM vara bisektrisen till $\angle A$ och BN vara bisektrisen till $\angle B$. Visa att $AM = BN$.

9.2 Sida–vinkel–sida



Två trianglar är kongruenta om två sidor och den mellanliggande vinkeln är lika stora i de båda trianglarna.

4. Låt $ABCE$ vara en kvadrat och CDE en liksidig triangel som inte ligger i kvadraten.

1. Visa att $AD = BD$.
2. Visa att $CBD = 15°$.

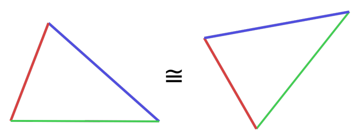
5. Låt $ABCD$ vara ett parallellogram och O vara diagonalernas skärningspunkt. Visa att $AB = CD$ och $BC = AD$.

6. I en fyrhörning $ABCD$ är $AB = BC$ och $CD = AD$. Visa att AC är vinkelrät mot BD.

Anm. Fyrhörningen i problem 6 som ser ut som en drake kallas för *deltoid*.

7. Låt ABC vara en triangel och $BMNC$ och $CPQA$ två kvadrater, som inte överlappar. Visa att $AN = BP$.

9.3 Sida–sida–sida



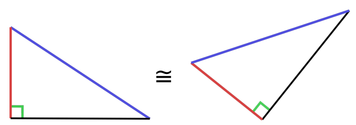
Två trianglar är kongruenta om alla tre motsvarande sidor är lika långa i de båda trianglarna.

8. En punkt P ligger i en romb (ett liksidigt parallellogram) så att $AP = CP$. Visa att B, P och D ligger på en och samma linje.

9. I en triangel ABC är $AB = BC$. Låt D vara en punkt i triangeln så att $\angle ACD = \angle CAD$. Visa att AD är en bisektris till $\angle B$.

10. Låt $ABCD$ vara en romb. Visa att diagonalerna är vinkelräta.

9.4 Sida–sida i rätvinkliga trianglar



Två rätvinkliga trianglar är kongruenta om två motsvarande sidor är lika långa i de båda trianglarna.

11. I två rätvinkliga trianglar ABC och MNO är $AB = MN$ och $BC = NO$. Visa att ABC är kongruent med MNO.

12. I en triangel ABC är D mittpunkten på AC. Höjderna från D till AB respektive BC är lika långa. Visa att ABC är likbent.

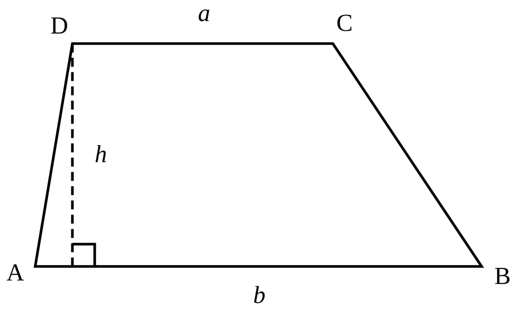
13. I en vinkel ligger en punkt P. Höjderna mot vinkelns armar är lika långa. Visa att P ligger på vinkelns bisektris.

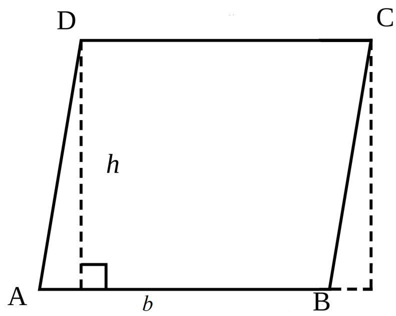
14. Fredrik tror sig ha ett femte och sjätte kongruensfall. Dessa är (d) Två sidor och valfri vinkel och (e) en vinkel, en bisektris dragen från dess hörn och en intilliggande sida. Har han det?

10. Area II. Fyrhörningar

21:a juli

- En *parallelltrapets* är en fyrhörning där minst två sidor är parallella.
- Ett *parallellogram* är en fyrhörning vars motstående sidor är parallella (och lika).





1. Visa att parallellogramets area är lika med produkten av längden av en valfri sida (som kallas *basen*) och motsvarande höjd dragen till denna sida.

$$S_{ABCD} = b \cdot h$$

2. Visa att parallelltrapetsens area är lika med produkten av höjden och medelvärdet av de parallella sidorna:

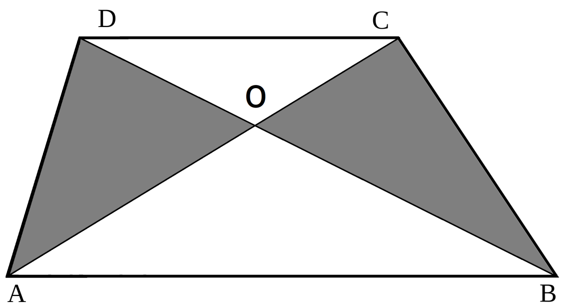
$$S_{ABCD} = \frac{a+b}{2} \cdot h$$

3. Visa att linjen som dras genom mittpunkterna av parallelltrapetsens baser delar den i två delar med lika stor area.

4. Från mittenpunkten L av sidan BC i triangeln ABC drar man två linjer som är parallella med sidorna AB och AC. Skärningen av dessa linjer med motsvarande sidor, K och M, skapar ett parallellogram $AKLM$. Visa att arean av detta parallellogram är lika med hälften av den ursprungliga triangelns area.

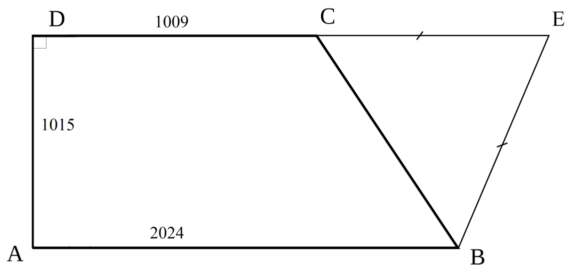
5. **(a)** Diagonalerna i parallelltrapetsen $ABCD$ (där AB och CD är baser, alltså $AB||CD$) skär varandra i punkten O. Bevisa att $S(AOD) = S(BOC)$.

   (b) Bevisa det omvända: Om diagonalerna i den (konvexa) fyrhörningen $ABCD$ skär varandra i punkten O och $S(AOD) = S(BOC)$, så är $ABCD$ en parallelltrapets, alltså $AB||CD$.



6. Baserna av en likbent parallelltrapets $ABCD$ har längderna a och b, och vinkeln mellan basen AB och sidan AD är lika med $45°$. Räkna ut trapetsens area.

7. I en rätvinklig parallelltrapets $ABCD$ är baserna AB 2024 cm och CD och 1009 cm. Sidan AD är 1015 cm men sidan BC är okänd. På fortsättningen av DC förbi C ligger en punkt E, så att $CE = DE$. Räkna ut arean av fyrhörningen $ABED$.

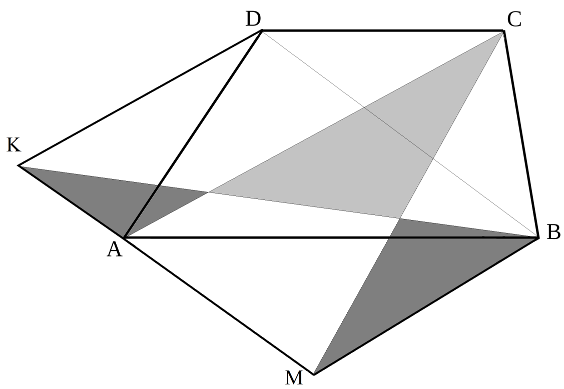


8. Bevisa att arean av en parallelltrapets är lika med längden av dess sida multiplicerad med längden av höjden dragen från mitten av den motstående sidan.

9. Låt $ABCD$ vara en parallelltrapets så att CD är den kortare basen. En linje skär punkten D och är parallell med sidan BC. Denna linje skär trapetsens längre bas AB i en punkt E. Har triangel ACD eller BCE större area?

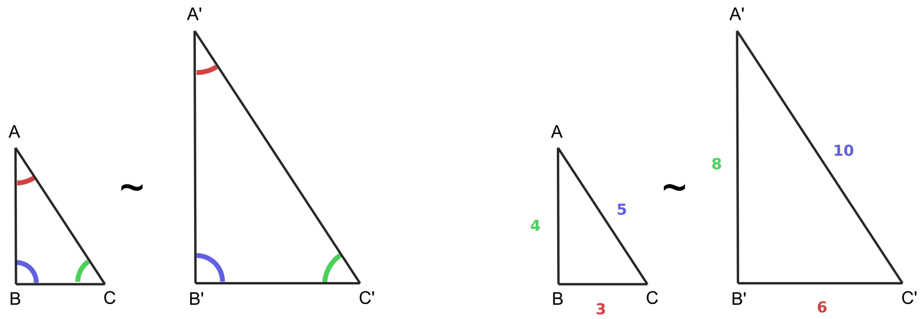
Extra uppgifter

10. Låt $ABCD$ vara en parallelltrapets och $BMKD$ vara ett parallellogram, så att diagonalerna i trapetsen är parallella med sidorna i parallellogrammet. Tre diagonaler BK, AC och CM skär varandra och skapar flera trianglar. Visa att arean av den ljusgråa triangeln och summan av areorna av de mörkgråa trianglarna är lika stora.



11. Likformiga trianglar

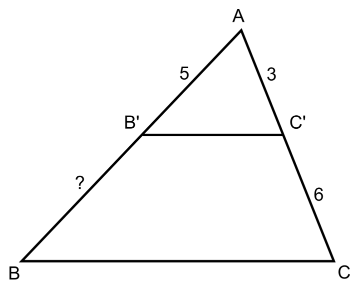
22:a juli



Två trianglar är likformiga om alla tre vinklar är lika stora i de båda trianglarna. Det vill säga $\angle A = \angle A'$, $\angle B = \angle B'$ och $\angle C = \angle C'$. De är även likformiga om alla tre sidor i den ena triangeln är proportionella mot den andra, det vill säga

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}.$$

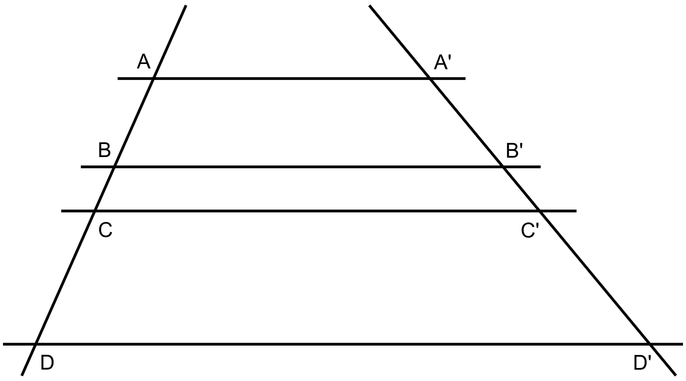
Problem



1. Låt ABC vara en triangel och B' en punkt på AB och C' en punkt på AC. Sträckan $AC' = 3$, $CC' = 6$ och $AB' = 5$. Räkna ut BB'.

2. Låt ABC vara en triangel och B' mittpunkten på AB och C' mittpunkten på AC. Visa att $2 \cdot B'C' = BC$.

3. Låt ABC vara en triangel och låt D, E, F vara mittpunkterna på sidorna BC, AC respektive AB. Visa att triangeln ABC är likformig med triangeln DEF.

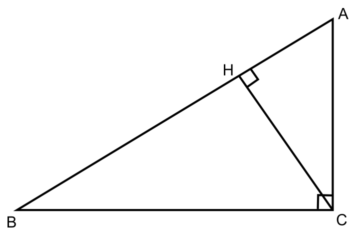


4. Visa att några parallella linjer delar upp två linjer, enligt bilden nedan, i proportionella sträckor. Det vill säga

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BD}{B'D'} = \frac{AD}{A'D'}.$$

5. Låt $ABCD$ vara en parallelltrapets så att AB är parallell med CD. Låt M vara mittpunkten på AD och N mittpunkten på BC. Visa att $\frac{AB+CD}{2} = MN$.

6. Fredrik påstår att två fyrhörningar $ABCD$ och $A'B'C'D'$ är likformiga om $\angle A = \angle A'$, $\angle B = \angle B'$, $\angle C = \angle C'$ och $\angle D = \angle D'$. Bekräfta antingen Fredriks påstående med ett bevis eller hitta ett motexempel.



7. Visa att höjden CH dragen mot hypotenusan i en rätvinklig triangel delar den stora triangeln i två mindre trianglar som är likformiga med den stora samt med varandra.

8. För en triangel ABC är D mittpunkt på BC och E mittpunkt på AC. Linjerna AD och BE skär varandra i en punkt G. Visa att sträckan DG är dubbelt så lång som AG (utan att använda ett areabevis).

Extraproblem

9. Låt $ABCD$ vara en fyrhörning och P, Q, R och S vara mittpunkter på sidorna AB, BC, CD respektive AD. Visa att $PQRS$ är ett parallellogram.

10. Låt AD vara en median i en triangel ABC och P en punkt på medianen. Punkterna E och F ligger på AC respektive AB, så P ligger på både BE och CF. Visa att EF är parallell med AB.

11. Sträckan AD delar triangeln ABC i två likformiga trianglar, vars ratio är $1 : \sqrt{3}$. Hitta vinklarna till ABC.

12. Area III. Månghörningar och cirklar

22:a juli

Enligt den välkända definitionen av talet π så är

$$\pi = \frac{L}{D},$$

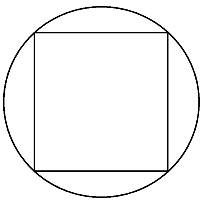
där L är cirkelns omkrets och D är cirkelns diameter. Alltså, cirkelns omkrets kan räknas ut som $\pi \cdot D$, men går det att få fram en formel för dess area?..

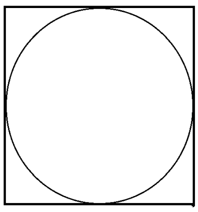
1. Visa att cirkelns area, S, är mindre än dess diameter i kvadrat, alltså $S < D^2$. Tänk dig en figur som har arean D^2 och är större än cirkeln.

2. Rita en figur med en känd area som är klart mindre än arean av cirkel med diametern D. Figurens area måste alltså kunna räknas ut med hjälp av D.

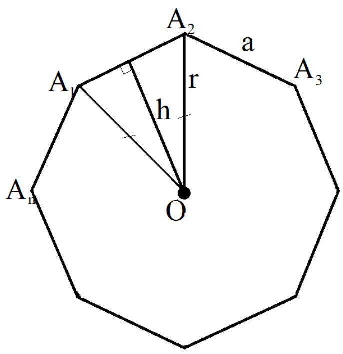
Regelbundna (konvexa) månghörningar är sådana månghörningar vars sidor är lika långa och vars vinklar är lika stora. För varje regelbunden månghörning finns det två cirklar: en som går att skriva *om* månghörningen och en som går att skriva *in* i månghörningen.

- En *omskriven* cirkel till en polygon är en cirkel som går genom polygonens samtliga hörn.
- En *inskriven* cirkel till en polygon är en cirkel som korsar polygonens samtliga sidor i en och endast en punkt (med andra ord så *tangerar* den polygonens sidor).





3. Den regelbundna månghörningen $A_1A_2A_3\dots A_n$ är inskriven i en cirkel med mittpunkten O. Visa att höjderna dragna från O till sidorna A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, …, A_nA_1 är alla lika långa.



4. Höjderna som nämns i den föregående uppgiften kallas for *apothemer*. Visa att area nav månghörningen $A_1A_2\dots A_n$ beräknas till hälften av produkten av dess omkrets $P = A_1A_2 + A_2A_3 + \dots A_nA_1 = n \cdot a$ (där a står för längden av månghörningens sida) och längden av dess apothem h, alltså

$$S = \frac{P \cdot h}{2}$$

5. Hur kan man räkna ut längden av radien av inskrivna cirkeln utifrån längderna av månghörningens sida och apothem (a och h)?

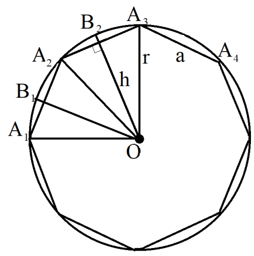
Tips: finns det några punkter som ligger på sidorna $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_nA_1$ som har lika stort avstånd till punkten O?

6. Hur kan man räkna ut längden av radien av den omskrivna cirkeln utifrån längderna av månghörningens sida och apothem (a och h)?

7. Den regelbundna månghörningen $A_1A_2A_3 \dots A_n$ är inskriven i en cirkel med mittpunkten O. Drar man vinkelräta strålar till månghörningens sidor från cirkelns mittpunkt O så får man n nya punkter där strålarna korsar cirkeln (se bilden nedan), $B_1, B_2, B_3, \dots, B_n$. Vi ska visa att även månghörningen $A_1B_1A_2B_2A_3B_3 \dots A_nB_n$ är regelbunden.

(a) Visa att vinklarna $A_1B_1A_2$, $B_1A_2B_2$, $B_2A_3B_3$, …, $B_nA_1B_1$ är alla lika.

(b) Visa att sidorna A_1B_1 B_1A_2, A_2B_2, …, B_nA_1 är alla lika



8. Låt säga att i föregående problem E står för arean av den omskrivna cirkeln som är utanför månghörningen $A_1A_2A_3 \dots A_n$ och F står för arean av omskrivna cirkeln som är utanför den nya månghörningen $A_1B_1A_2B_2 \dots A_nB_n$. Visa att $E \geq 2 * F$.

9. Förklara varför $S < \frac{L*r}{2}$, där S är arean av en valfri inskriven månghörning, r är radien av den omskrivna cirkeln till månghörningen och L är omkretsen av omskrivna cirkeln. Tips: använd resultatet från uppgift 4.

Notera att observationerna från de två sista uppgifterna, 8 och 9, leder oss till slutsatsen att cirkelns area,

$$S \leq \frac{L * r}{2} = \pi * r^2$$

Extra uppgifter

10. Visa att för cirkelns area S gäller att $S \geq \dfrac{L * r}{2}$, där r står för radien och L för cirkelns omkrets.

13. Mattemaraton

22:a juli

För varje löst (och korrekt redovisad!) uppgift får man ett antal poäng som beräknas enligt formeln

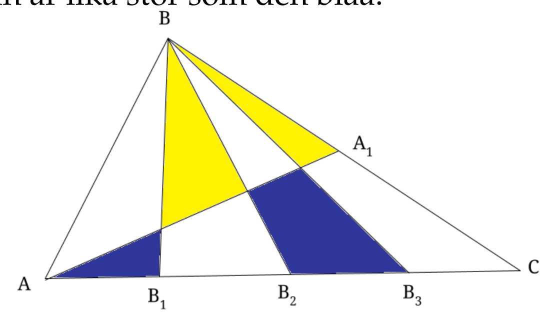
$$1 + S,$$

där S är antal deltagare som inte ännu löst detta problem.

Notera att problemen är inte nödvändigtsvis sorterade enligt svårighetsgrad.

1. Dela in en 4×8-rektangel i 9 kvadrater så att varje kvadrats area är ett heltal.

2. I triangeln ABC nedan är punkten A_1 mittpunkten på sidan BC, medan punkterna B_1, B_2 och B_3 delar upp sidan AC i fyra lika långa sträckor. Visa att den gula arean är lika stor som den blåa.



3. Lös rebusen: $OW \cdot AW = 2001$. Likadana bokstäver motsvarar likadana siffror och olika bokstäver motsvarar olika siffror.

4. Bevisa att arean av ett parallelltrapets är lika med längden av dess sida multiplicerad med längden av höjden dragen från mitten av den motstående sidan.

5. Tomten fick följande önskemål om julklappar från 5 barn i samma familj:

- Astor skrev att han vill ha en flygande grej med få ben, om några alls.
- Evelina önskade sig en nalle-svamp.
- Ture vägrar att ta emot något flygande.
- Eir vill att hennes julklapp ska kunna flyga, men absolut inte något mjukt.
- Sara ska inte ha något mjukt, men önskar att leksaken ska ha minst 1000 ben.

Går det att säkerställa alla deras önskemål med endast två presenter de får turas om att leka med?

6. Finns det en triangel med höjder som är 1 cm, 2 cm respektive 3 cm långa?

7. Leonid hävdar att han kan skriva ett 9-siffrigt tal som består av siffrorna $1, \ldots, 9$ så att varje par av på varandra följande siffror skapar ett 2-siffrigt tal som är delbart med 7 eller 13. Är Leonid lite för självsäker?

8. I Hittapålandet finns det exakt 2024 vägar mellan städerna. Hittepåborna påstår även att det går 3 vägar ur varje stad i deras land. Kan detta vara sant?

9. Efter Capture-The-Flag-spelet skröt en deltagare från det vinnande laget om att de vann och samlade 9 flaggor fler än det förlorande laget. Kompisen till deltagaren i fråga berättade nyheten vidare men sade då att skillnaden mellan lagen var hela 18 flaggor. När nyheten spreds vidare, multiplicerade programmerare differensen med 3, medan matematiker enbart multiplicerade den med 2. Till slut kom det upp på SVT att man hade vunnit med 7776 flaggor fler. Hur många programmerare och hur många matematiker var med och hjälpte till att sprida nyheten?

10. På hur många sätt kan man välja fem böcker från tolv böcker som står i rad om man inte får välja på varandra följande böcker?

11. Vad får man om man tar differens av summan av alla tal på udda platser och summan av alla tal på jämna platser i n:te raden i Pascals triangel?

12. Leonid har en anteckningsbok, som än så länge består av 100 underliga anteckningar:

- Denna anteckningsbok innehåller exakt ett falsk påstående,
- Denna anteckningsbok innehåller exakt två falska påståenden,
  ...
- Denna anteckningsbok innehåller exakt hundra falska påståenden.

Hur många falska påståenden innehåller egentligen den mystiska anteckningsboken?

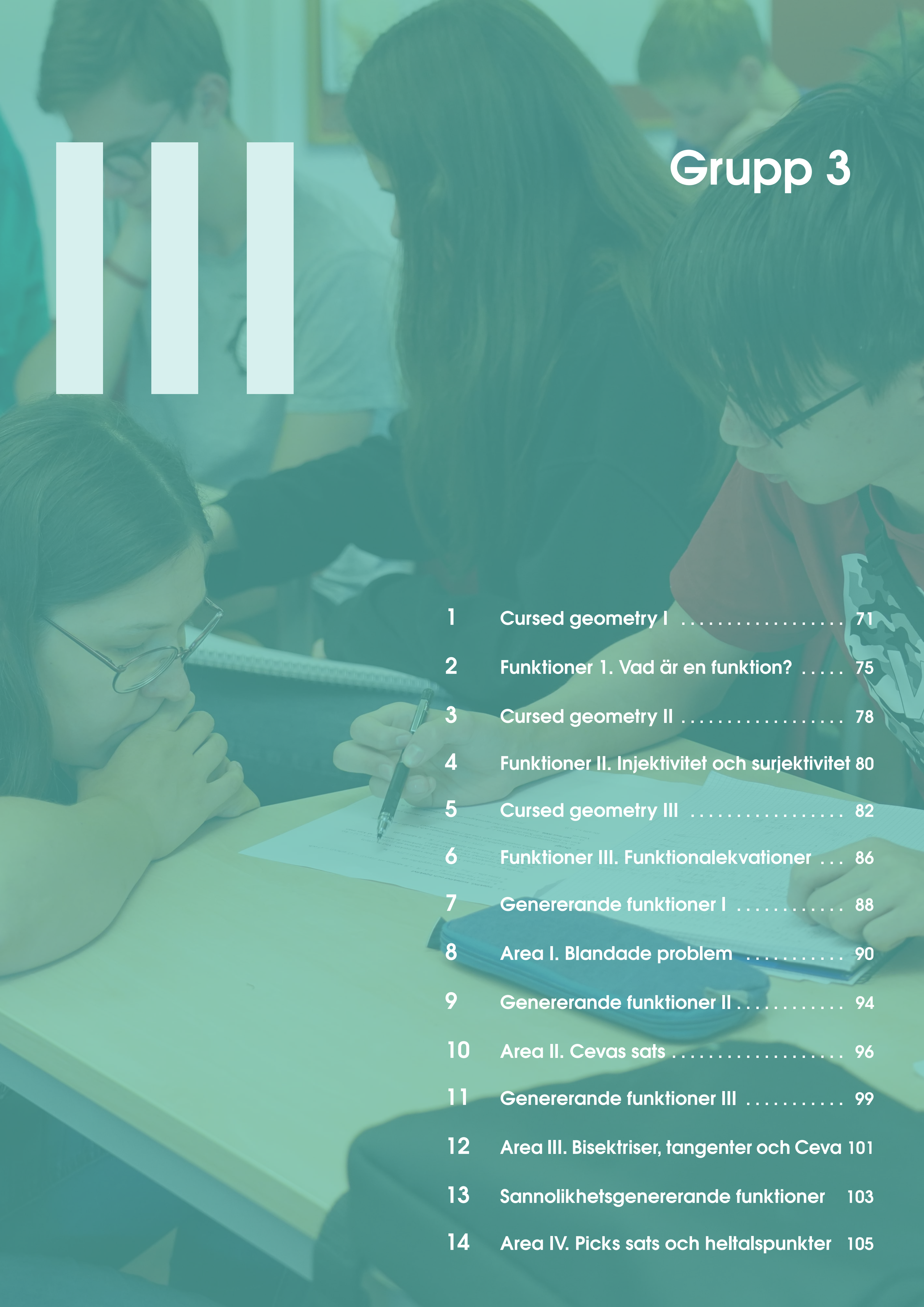
13. Finns det en graf med 2n noder som har graderna 1, 1, 2, 2, . . . , n, n?

14. Hur många 6-siffriga tal finns det där inga två intilliggande siffror är lika med varandra?

15. En fluga sitter i ett av hörnen på en kub. Kan den krypa på varje kant av kuben en och endast en gång och återvända dit den började?

16. I två glas fanns det lika stora mängder av mjölk och kaffe: mjölk i det ena och kaffe i det andra. Först tog man en tesked av mjölken från det ena glaset och hällde in det i det andra glaset. Efter att ha blandat lite i det andra glaset, tog man en tesked av blandningen från det och hällde tillbaka det till det första glaset. Vad finns det mer av nu, kaffet i det första glaset eller mjölken i det andra?

17. I en triangel är en av vinklarna 36° och de andra två ett heltal grader. Triangeln kan delas i två likbenta trianglar med en linje. Ta reda på alla möjliga värden på den största vinkeln i triangeln.



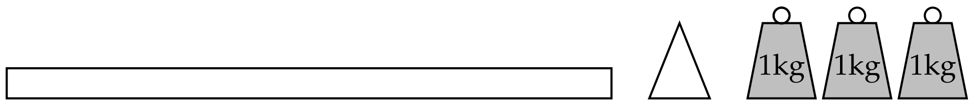
III

Grupp 3

1. Cursed geometry I

16:e juli

1.1 Kraftmoment, ett koordinatsystem?



Figur 1.1

1. Vi har en bräda och tre enkilosvikter.

(a) Kan vi hitta mittpunkten av brädan?

(b) Kan vi hitta punkten på brädan som är dubbelt så långt från den vänstra sidan som från den högra?

2. Vi har tre punkter i planet med vikter 1, 2 respektive 3 kg. Hur kan vi hitta deras masscentrum?

Definition. Betrakta en triangel ABC och en punkt P. Om massorna x, y och z placerade i hörnen A, B och C gör P till masscentrum för triangeln säger vi att P har *barycentriska koordinater*

$$P = (x : y : z).$$

Summan $x+y+z$ får inte vara 0, och om vi skalar om vikterna så att $x+y+z=1$ säger vi att (x, y, z) är *homogeniserade* barycentriska koordinater.

R Vikterna kan vara 0 eller negativa vilket låter oss beskriva alla punkter, inte bara de inuti triangeln.

3. Vad är de barycentriska koordinaterna för triangelhörnen A, B och C?

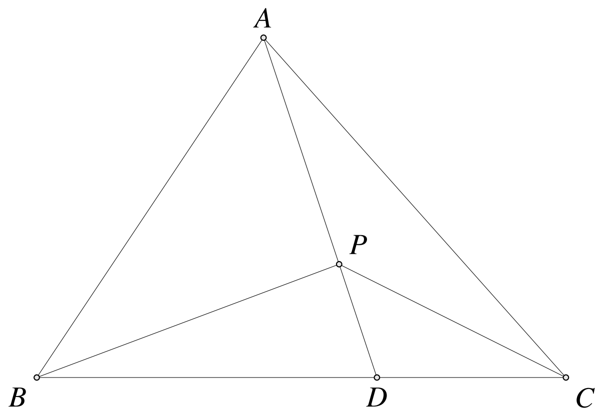
4. Låt ABC vara vår referenstriangel. Hitta de barycentriska koordinaterna för mittpunkten av sidan BC.

1.2 Punkter och areor

Sats 1.1. Låt P vara en punkt inuti triangeln ABC. Om P har homogeniserade barycentriska koordinater (x,y,z) med avseende på ABC, så är

$$x = \frac{[PBC]}{[ABC]},\ y = \frac{[APC]}{[ABC]},\ z = \frac{[ABP]}{[ABC]}.$$

Här betecknar $[ABC]$ arean av en triangel ABC.



Figur 1.2

5. Vi ska bevisa satsen ovan. Låt först D vara skärningen av AP med BC som i Figur 1.2.

(a) Motivera varför D måste vara masscentrum för vikterna i B och C.

(b) Vi kan alltså betrakta vikterna y och z i B och C som en gemensam vikt i D med storleken $(y+z) = 1-x$. Använd detta för att visa att

$$x = \frac{PD}{AD}.$$

(c) Slutför beviset genom att visa att

$$x = \frac{[PBC]}{[ABC]}.$$

På liknande vis kan vi givetvis även få y och z.

R Areakvotvärdet på x håller även för punkter utanför triangeln, om vi betraktar kvoten som negativ när punkten ligger på motsat sida av BC som A istället för på samma.

6. Låt ABC vara vår referenstriangel och låt ω vara cirkeln som tangerar alla tre sidor av triangeln. Cirkeln ω kallas för den inskrivna cirkeln till ABC och dess medelpunkt betecknas ofta med bokstaven I. Hitta de (inte nödvändigtvis homogeniserade) barycentriska koordinaterna till punkten I i termer av triangelns sidlängder a,b och c.

1.3 Linjer

Sats 1.2. Ekvationen för en linje är $ux + vy + wz = 0$, där u, v och w är konstanter och (x, y, z) är de homogeniserade barycentriska koordinaterna för en punkt.

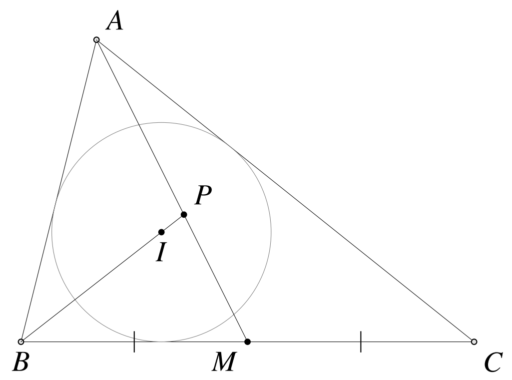
7. Egenskaper av linjer.

(a) Låt $(x_1 : y_1 : z_1)$ vara koordinater för en punkt P och betrakta en linje $ux + vy + wz = 0$. Visa att $ux_1 + vy_1 + wz_1 = 0$ om och endast om punkten P ligger på linjen. Det vill säga, visa att det inte spelar någon roll om koordinaterna är homogeniserade eller inte innan vi stoppar in dem i linjeekvationen.

(b) Låt ABC vara vår referenstriangel och låt $P = (x_1 : y_1 : z_1)$ vara en godtycklig punkt annan än A. Visa att alla punkter på linjen AP (förutom A) har koordinater

$$(t : y_1 : z_1)$$

för något t.



Figur 1.3

8. Låt ABC vara vår referenstriangel, M vara mittpunkten av sidan BC, och I vara mittpunkten av den inskrivna cirkeln till ABC. Hitta de barycentriska koordinaterna till skärningen mellan linjerna AM och BI.

9. Låt ABC vara vår referenstriangel, och låt M_A, M_B och M_C vara mittpunkterna för sidorna BC, CA och AB.

(a) Beräkna de barycentriska koordinaterna för skärningen mellan linjerna AM_A och BM_B.

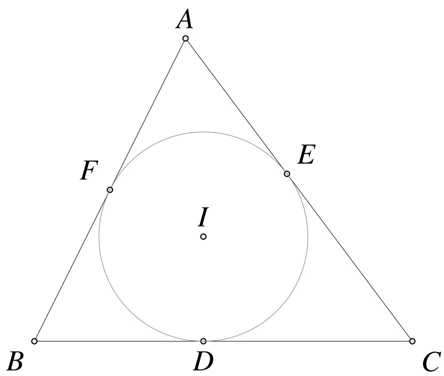
(b) Visa att de tre linjerna från en triangels hörn till motstående mittpunkter alla möts i en och samma punkt.

1.4 Extra problem

Sats 1.3. Låt D, E och F vara tangeringspunkterna av den inskrivna cirkeln till en triangel ABC. Då är

$$\begin{aligned}|AF| &= |AE| = s-a\\ |BF| &= |BD| = s-b\\ |CD| &= |CE| = s-c,\end{aligned}$$

där $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$ är halva omkretsen av triangeln.



Figur 1.4

10. Låt ABC vara en triangel med inskriven cirkel ω. Låt I vara centrum för ω, och D vara tangeringspunkten av ω med BC. Låt vidare M vara mittpunkten av BC och N vara mittpunkten av AD. Visa att M, N och I ligger på en linje.

11. Låt ABC vara en rätvninklig triangel med $\angle A = 90°$, och låt ω vara den inskrivna cirkeln till ABC. Låt D och E vara tangeringspunkterna av ω med BC och CA, och låt F vara punkten på linjen BA förbi A sådan att $|AF| = |DC|$. Visa att D, E och F ligger på en linje.

12. Låt ABC vara en triangel och D, E, F punkter på sidorna BC, CA, AB. Visa att AD, BE, CE alla skär varandra i en enda punkt om och endast om

$$\frac{BD}{DC}\frac{CE}{EA}\frac{AF}{FB} = 1.$$

2. Funktioner 1. Vad är en funktion?

16:e juli

Definition. Givet två mängder A och B, är en funktion $f : A \to B$ en regel som till varje element i A associerar ett element i B. Mängden A kallas *definitionsmängden* och mängden B kallas för *målmängden* för f. Målmängden ska inte blandas ihop med *värdemängden*, som är mängden av värden som f faktiskt tar.

■ **Exempel 1** Låt $A = \{\text{boll}, 1, a\}$ och $B = \{\text{boll}, 5\}$. Ett exempel på en funktion $f : A \to B$ ges av regeln $f(\text{boll}) = 5$, $f(1) = 5$ och $f(a) = \text{boll}$. Man kan också skriva regeln som

$$\begin{aligned} f : \text{boll} &\mapsto 5 \\ 1 &\mapsto 5 \\ a &\mapsto \text{boll}. \end{aligned}$$

Det är långt ifrån alla funktioner som lätt kan beskrivas med en formel! ■

■ **Exempel 2** För varje mängd A existerar en funktion $\text{Id}_A : A \to A$ sådan att $\text{Id}_A(x) = x$ för alla $x \in A$. ■

■ **Exempel 3** Ett exempel på en funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ är absolutbeloppsfunktionen som ges av

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{om } x \text{ är icke-negativt} \\ -x & \text{annars.} \end{cases}$$

■

■ **Exempel 4** Ett exempel på en funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ges av

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{om } x \text{ är rationellt} \\ 0 & \text{annars.} \end{cases}$$

Denna funktion har värdemängden $\{0, 1\}$, som är betydligt mindre än målmängden. ■

■ **Exempel 5** Ett exempel på en funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ges av

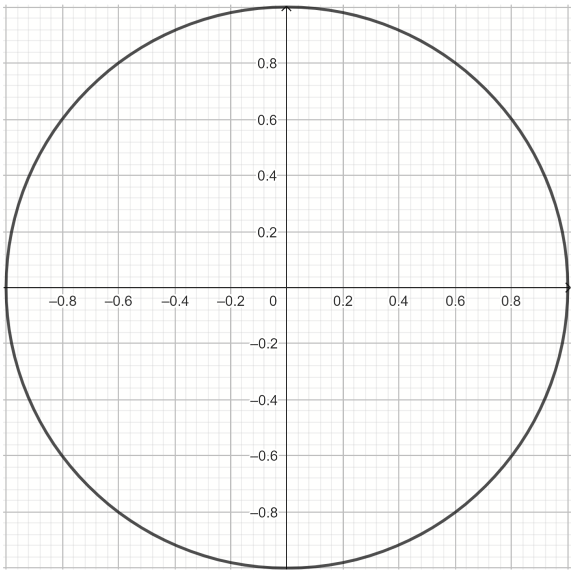
$$f(x) = \begin{cases} 1/|q| & \text{om } x = p/q \text{ för } p, q \text{ relativt prima heltal} \\ 0 & \text{annars.} \end{cases}$$

Denna funktion har värdemängden $\left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}\right\}$. ■

■ **Exempel 6** Något som INTE är en väldefinierad funktion $f : \mathbb{R} \to \{0, \dots, 9\}$ är

$$x \mapsto \text{första decimalen efter kommatecknet i } x\text{s decimalutveckling}$$

eftersom $1,0 = 0,9999999\dots$. ■



Figur 2.1: En cirkel är inte en graf till en funktion $f : [-1,1] \to [-1,1]$.

Definition. Givet mängder A och B är en funktionsgraf en delmängd $F \subset A \times B$ sådan att för varje $a \in A$ finns exakt ett element $b \in B$ sådant att $(a,b) \in F$.

■ **Exempel 7** Vanliga funktionsgrafer är funktionsgrafer. ■

■ **Exempel 8** Grafen till Exempel 1 är mängden $\{(\text{boll},5),(1,5),(a,\text{boll})\}$, men vi kan också en rita en bild. ■

■ **Exempel 9** En cirkel är inte en graf till en funktion $f : [-1,1] \to [-1,1]$. Se Figur 2.1. ■

1. Försök skissa graferna till funktionerna i Exempel 4 och 5.
2. Detta är en tävling. Ge det coolaste exemplet på en funktion

   a) $f_1 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$,

   b) $f_2 : \{\text{ord i SAOL}\} \to \mathbb{Z}$,

   c) $f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$.

Definition. Givet två mängder A och B betecknar vi mängden av funktioner $f : A \to B$ som B^A.

3. Om mängd A har m element, och mängd B har n element, hur många element har då B^A? Vad händer när m eller n är 0?

2.1 Sammansättningar av funktioner

Definition. Givet funktioner $f : A \to B$ och $g : B \to C$ så kan vi sätta samman dessa funktioner till en ny funktion $g \circ f : A \to C$ genom att säga att $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ för alla $x \in A$.

Sats 2.1. Låt $f : A \to B$, $g : B \to C$ och $h : C \to D$ vara funktioner. Då gäller att $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.

4. Låt M vara mängden av alla människor som någonsin existerat. Det finns såklart vissa problem med definitionen av människor, men följande är nästan funktioner: Ålder : $M \to \mathbb{Z}$, Mor : $M \to M$, Far : $M \to M$.

Vad blir sammansättningen Ålder $\circ$ Mor $\circ$ Far?

5. Låt $f_1, f_2, f_3, f_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vara följande funktioner:

- $f_1(x) = 1$ för alla x.
- $f_2 = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$.
- $f_3(x) = x^2$ för alla x.
- $$f_4(x) = \begin{cases} 1 & \text{om } x \text{ är rationellt} \\ 0 & \text{annars.} \end{cases}$$

Bestäm alla möjliga sammansättningar $f_i \circ f_j$.

6. Om $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ som definieras av $f(x) = x^2$, vad är $f(x+1)$?

7. Om $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uppfyller att $f(x+1) = x^2$ för alla $x \in \mathbb{R}$, vad är $f(x)$?

8. Finns funktioner $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sådana att $f(x^2) = x$ för alla $x \in \mathbb{R}$?

9. Finns funktioner $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sådana att $f(x^2) = x^4 - |x|$ för alla $x \in \mathbb{R}$?

10. Antag att du har en funktionalekvation på formen $f(h(x)) = g(x)$ där g, h är givna och du ska hitta f. Under vilka villkor finns en lösning?

11. Ge ett exempel på en funktion $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ sådan att $f(f(x)) = x + 2$ för alla $x \in \mathbb{Z}$. Kan du hitta en till? Kan du hitta alla?

2.2 Extra utmaningar

12. Hitta alla funktioner $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sådana att $f(\frac{x+1}{x}) = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$ för alla reella $x \neq 0$.

13. Hitta alla funktioner $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sådana att $f(x) + 2f(-x) = 3 - x$ för alla $x \in \mathbb{R}$.

14. Hitta alla funktioner $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sådana att $f(x+y) = x + f(y)$ för alla $x, y \in \mathbb{R}$.

15. Hitta alla funktioner $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sådana att $x^2 f(x) + f(1-x) = 2x - x^4$ för alla $x \in \mathbb{R}$.

16. Hitta alla funktioner $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$ sådana att $f(\frac{1}{x}) + \frac{1}{x} f(-x) = x$ för alla $x \in \mathbb{R} - \{0\}$.

17. Finns det en funktion $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ sådan att $f(f(x)) = x + 1$ för alla $x \in \mathbb{Z}$?

3. Cursed geometry II

17:e juli

3.1 Avstånd

Definition. Låt $P = (x_1, y_1, z_1)$ och $Q = (x_2, y_2, z_2)$ vara punkter. Vi kallar trippeln av tal $\overrightarrow{PQ} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ för en *förskjutningsvektor*.

Sats 3.1. Låt P och Q vara punkter med förskjutningsvektor $\overrightarrow{PQ} = (x, y, z)$. Avståndet mellan P och Q ges då av

$$|PQ|^2 = -a^2yz - b^2zx - c^2xy,$$

där a, b och c är sidlängderna av referenstriangeln ABC.

(R) Förskjutningsvektorer och avståndsformeln kräver att de barycentriska koordinaterna är homogeniserade.

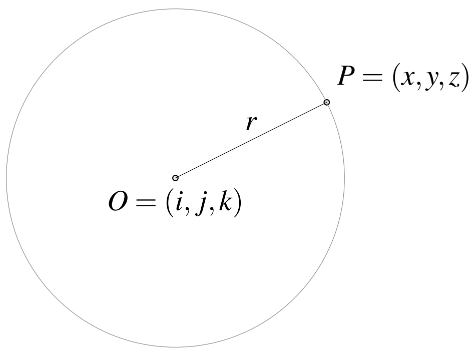
1. Låt ABC vara en triangel och M vara mittpunkten av sidan BC. Bestäm ett uttryck för sträckan AM.

3.2 Cirklar

Sats 3.2. En cirkel har ekvationen

$$-a^2yz - b^2zx - c^2xy + (ux + vy + wz)(x + y + z) = 0,$$

där u, v och w är konstanter och a, b och c är triangelns sidor.



Figur 3.1

2. Vi ska nu härleda cirkelekvationen.

(a) Låt $O = (i, j, k)$ vara centrum för en cirkel och r vara dess radie. Visa att en punkt $P = (x, y, z)$ måste uppfylla

$$-a^2yz - b^2zx - c^2xy + C_1x + C_2y + C_3z + C = 0$$

för att ligga på cirkeln, där C_1, C_2, C_3 och C är några konstanter.

(b) Eftersom $x + y + z = 1$ kan vi skriva C som $C(x + y + z) = Cx + Cy + Cz$. Använd detta för att slutföra beviset.

3. Visa att cirkeln som går genom alla tre hörn av vår referenstriangel ABC, den så kallade *omskrivna cirkeln* till ABC, har ekvationen

$$a^2yz + b^2zx + c^2xy = 0,$$

där a, b och c är triangelns sidor.

3.3 Problem

4. — EGMO 2013 P1. Sidan BC av triangeln ABC förängs förbi C till punkten D så att $|CD| = |BC|$. Sidan CA förlängs förbi A till punkten E så att $|AE| = 2|CA|$. Visa att om $|AD| = |BE|$, så är triangeln ABC rätvinklig.

5. Låt ABC vara en triangel med centrum I för sin inskrivna cirkel. Låt vidare D vara punkten på strålen AC sådan att $|AD| = |AB|$. Visa att B, C, D och I alla ligger på en cirkel.

6. — SMT Kval 2022 P5. Punkten M är mittpunkt på sidan BC i triangeln ABC. Punkten P på sidan AB är sådan att $|BP| = 2|AP|$ och $|PM| = |AP|$. Visa att $|BC| = 2|AC|$.

7. Låt ABC vara en triangel. Låt D vara en punkt på sträckan BC på ett avstånd s från C, och låt E vara en punkt på linjen BA förbi A på ett avstånd s från A. Visa att skärningen mellan den omskrivna cirkeln till ABC och den omskrivna cirkeln till DBE (förutom A) ligger på bisektrisen till $\angle B$.

8. — IMO 2014 P4. Låt P och Q vara punkter på sidan BC av den spetsvinkliga triangeln ABC sådana att $\angle PAB = \angle BCA$ och $\angle CAQ = \angle ABC$. Låt M och N vara punkter på AP respektive AQ sådana att P är mittpunkten av AM och Q är mittpunkten av AN. Visa att skärningen av BM och CN ligger på den omskrivna cirkeln till triangeln ABC.

9. Låt ABC vara en triangel, och D en punkt på sidan BC.

(a) Finn en ekvation för cirkeln om går genom D och är tangent med AB i punkten B.

(b) Låt ω_1 vara cirkeln i (a), och definiera på liknande vis ω_2 som cirkeln genom D som är tangent med AC i punkten C. Visa att ω_1, ω_2 och den omskrivna cirkeln till ABC alla möts i en gemensam punkt.

4. Funktioner II. Injektivitet och surjektivitet

17:e juli

4.1 Injektiva och surjektiva funktioner

1. Låt $A = \{1,2,3,4\}$ och $B = \{1,2,3,4,5\}$. Finns det funktioner $f_1 : A \to B$ och $f_2 : B \to A$ sådana att

a) $f_1 \circ f_2 = \mathrm{Id}_B$?

b) $f_2 \circ f_1 = \mathrm{Id}_A$?

Definition. En funktion $f : A \to B$ kallas injektiv om $f(x) = f(y)$ innebär att $x = y$, det vill säga att olika element mappas på olika element.

■ **Exempel 10** Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definierad av $f(x) = x^2$ är INTE injektiv eftersom $f(1) = f(-1)$, men $1 \neq -1$. Däremot är funktionen $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ definierad av $f(x) = x^2$ injektiv, eftersom $x^2 = y^2$ alltid innebär att $x = y$ om både x och y ska vara icke-negativa. ■

■ **Exempel 11** Om A och B är ändliga mängder med a respektive b element och det finns en injektiv funktion $f : A \to B$, så måste $a \leq b$. ■

2. Låt $f : A \to B$ och $g : B \to C$ vara injektiva funktioner. Visa att $g \circ f$ är injektiv.

Definition. En funktion $f : A \to B$ kallas surjektiv om det för alla $b \in B$ finns minst ett $a \in A$ sådant att $f(a) = b$. Med andra ord så är en funktion surjektiv om och endast om dess värdemängd utgör hela målmängden.

■ **Exempel 12** Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definierad av $f(x) = x^2$ är INTE surjektiv eftersom -1 inte ligger i värdemängden. Däremot är funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ definierad av $f(x) = x^2$ surjektiv. ■

3. Låt A och B vara ändliga mängder med a respektive b element. Antag att det finns en surjektiv funktion $f : A \to B$. Hur förhåller sig a och b till varandra?

4. Låt $f : A \to B$ och $g : B \to C$ vara surjektiva funktioner. Visa att $g \circ f$ är surjektiv.

5. Antag att $f \circ g$ är en injektiv funktion. Vad vet vi om f och g? Vad händer om $f \circ g$ är en surjektiv funktion?

Definition. En funktion $f : A \to B$ kallas bijektiv om den är både injektiv och surjektiv.

Sats 4.1. En funktion $f : A \to B$ är bijektiv om och endast om det existerar en funktion $f^{-1} : B \to A$ sådan att $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_B$ och $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_A$. Funktionen f^{-1}

kallas för fs *invers*.

■ **Exempel 13** Funktionen $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ definierad av $f(x) = x^2$ är bijektiv. Dess invers är $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$. ■

■ **Exempel 14** Funktionen $f : \mathbb{R}_{\leq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ definierad av $f(x) = x^2$ är bijektiv. Dess invers är $f^{-1}(x) = -\sqrt{x}$. ■

■ **Exempel 15** Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$ definierad av $f(x) = e^x$ är bijektiv. Dess invers är $f^{-1}(x) = \ln x$. ■

6. Bevisa satsen.

7. Låt $f : A \to B$ och $g : B \to C$ vara bijektiva funktioner.

   a) Visa att $g \circ f$ är bijektiv.

   b) Visa att $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

8. Visa att funktionen $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$ definierad av $f(x) = \frac{x}{x+1}$ är bijektiv.

9. Hitta alla funktioner $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sådana att $f(\frac{x+1}{x}) = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$ för alla reella $x \neq 0$.

10. Hitta en bijektiv funktion $f : [0,1] \to (0,1)$.

Vi kan räkna med funktioner lite som med tal. Om $f : A \to B$ och $g : B \to C$ kan vi ju sätta samman dessa funktioner till en funktion $g \circ f : A \to C$.

Sats 4.2. Låt $f : A \to B$ och $g : B \to C$, $h : C \to D$ vara funktioner. Då gäller:

a) $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.

b) $Id_B \circ f = f = f \circ \mathrm{Id}_A$.

c) Om f är injektiv, så finns en funktion i sådan att $i \circ f = \mathrm{Id}_A$.

d) Om f är surjektiv så finns en funktion j sådan att $f \circ j = \mathrm{Id}_B$.

e) Om f och g är bijektiva så är $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

11. Bevisa satsen.

12. För vilka mängder A finns det en funktion $f : A \to A$ som inte är Id_A sådan att $f^{-1} = f \circ f$?

13. Finns det funktioner $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sådana att $f(g(x)) = x^3$, $g(h(x)) = x^4$ och $h(f(x)) = x^5$ för alla $x \in \mathbb{R}$?

4.2 Extraproblem

14. Låt $f : \mathbb{Z}_{\geq 0} \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ vara en surjektiv funktion och $g : \mathbb{Z}_{\geq 0} \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ vara en injektiv funktion. Visa att om $f(n) \geq g(n)$ för alla n så måste $f = g$.

5. Cursed geometry III

18:e juli

5.1 Punkter

Definition. De barycentriska koordinaterna till punkten P med avseende på triangeln ABC är talen $(x:y:z)$ sådana att P är masscentrum när vikterna x, y och z placeras i A, B och C. Om $x+y+z=1$ så är koordinaterna homogeniserade.

Sats 5.1. Låt P vara en punkt inuti triangeln ABC. Om P har homogeniserade barycentriska koordinater (x, y, z) med avseende på ABC, så är

$$x = \frac{[PBC]}{[ABC]}, \; y = \frac{[APC]}{[ABC]}, \; z = \frac{[ABP]}{[ABC]}.$$

5.2 Linjer

Sats 5.2. Ekvationen för en linje är $ux+vy+wz=0$, där u, v och w är konstanter och $(x:y:z)$ är barycentriska koordinater.

Sats 5.3. Om $A=(1,0,0)$ är ett hörn i vår referenstriangel och $P=(x:y:z)$ är en annan punkt, så kan alla punkter på linjen AP (förutom A) skrivas på formen $(t:y:z)$ för något tal t.

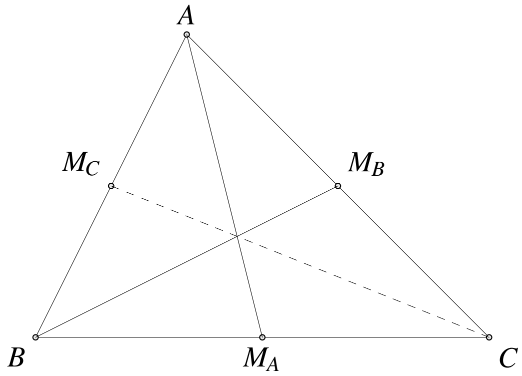
5.3 Avstånd

Definition. Låt $P=(x_1, y_1, z_1)$ och $Q=(x_2, y_2, z_2)$ vara punkter. Vi kallar trippeln av tal $\overrightarrow{PQ}=(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1)$ för en *förskjutningsvektor*.

Sats 5.4. Låt P och Q vara punkter med förskjutningsvektor $\overrightarrow{PQ}=(x, y, z)$. Avståndet mellan P och Q ges då av $|PQ|^2 = -a^2yz - b^2zx - c^2xy$, där a, b och c är sidlängderna av referenstriangeln ABC.

Sats 5.5. En cirkel har ekvationen $-a^2yz-b^2zx-c^2xy+(ux+vy+wz)(x+y+z)=0$, där u, v och w är konstanter och a, b och c är triangelns sidor.

5.4 Problem

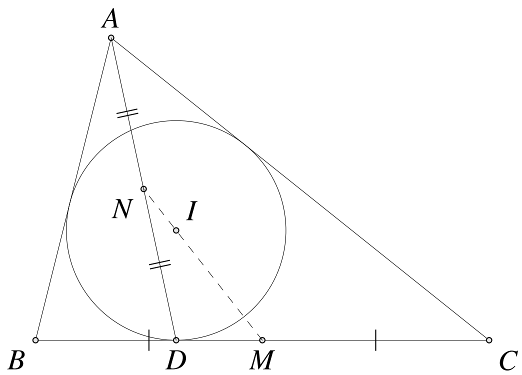


Figur 5.1

1. Låt ABC vara vår referenstriangel, och låt M_A, M_B och M_C vara mittpunkterna för sidorna BC, CA och AB.

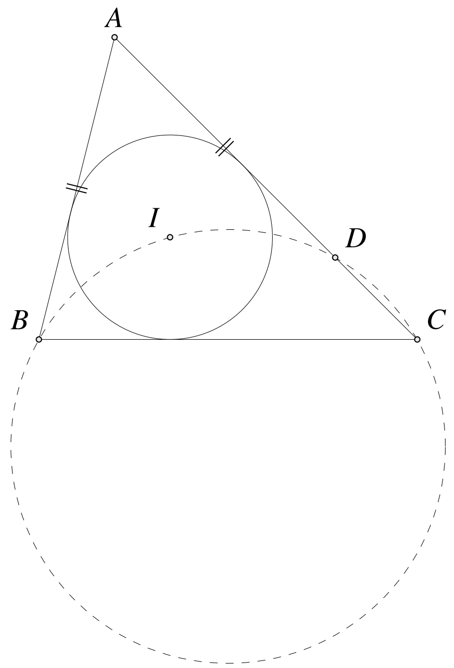
   (a) Beräkna de barycentriska koordinaterna för skärningen mellan linjerna AM_A och BM_B.

   (b) Visa att de tre linjerna från en triangels hörn till motstående mittpunkter alla möts i en och samma punkt.



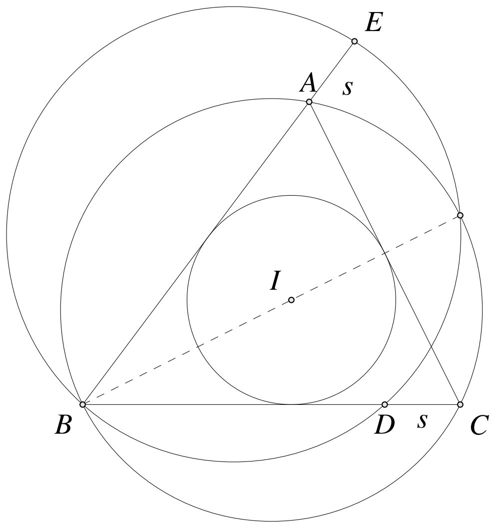
Figur 5.2

2. Låt ABC vara en triangel med inskriven cirkel ω. Låt I vara centrum för ω, och D vara tangeringspunkten av ω med BC. Låt vidare M vara mittpunkten av BC och N vara mittpunkten av AD. Visa att M, N och I ligger på en linje.



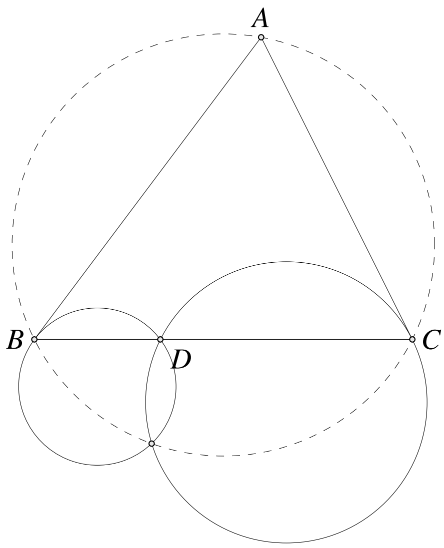
Figur 5.3

3. Låt ABC vara en triangel med centrum I för sin inskrivna cirkel. Låt vidare D vara punkten på strålen AC sådan att $|AD| = |AB|$. Visa att B, C, D och I alla ligger på en cirkel.



Figur 5.4

4. Låt ABC vara en triangel med centrum I för den inskrivna cirkeln. Låt D vara en punkt på sträckan BC på ett avstånd s från C, och låt E vara en punkt på linjen BA förbi A på ett avstånd s från A. Visa att skärningen mellan den omskrivna cirkeln till ABC och den omskrivna cirkeln till DBE (förutom A) ligger på linjen BI.



Figur 5.5

5. Låt ABC vara en triangel, och D en punkt på sidan BC.

(a) Finn en ekvation för cirkeln som går genom D och är tangent med AB i punkten B.

(b) Låt ω_1 vara cirkeln i (a), och definiera på liknande vis ω_2 som cirkeln genom D som är tangent med AC i punkten C. Visa att ω_1, ω_2 och den omskrivna cirkeln till ABC alla möts i en gemensam punkt.

6. **— IMO 2014 P4.** Låt P och Q vara punkter på sidan BC av den spetsvinkliga triangeln ABC sådana att $\angle PAB = \angle BCA$ och $\angle CAQ = \angle ABC$. Låt M och N vara punkter på AP respektive AQ sådana att P är mittpunkten av AM och Q är mittpunkten av AN. Visa att skärningen av BM och CN ligger på den omskrivna cirkeln till triangeln ABC.

6. Funktioner III. Funktionalekvationer

18:e juli

En funktionalekvation är en ekvation där det obekanta är en funktion. Vi har redan fått se exempel på funktionalekvationer på föregående lektioner. Idag ser vi fler!

6.1 Att sätta in några värden

Man kan testa att sätta in några speciella tal såsom 0, 1 och $f(0)$ i funktionalekvationen för att få reda på något om funktionens struktur. Detta är särskilt användbart om funktionen har flera variabler. Man kan också testa att ersätta x med $-x$ (om definitionsmängden tillåter), att sätta $x = y$, $x = -y$ osv.

■ **Exempel 16** Vi vill hitta alla $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sådana att $f(x+y) = x + f(y)$ för alla $x, y \in \mathbb{R}$. Om f uppfyller ekvationen så vet vi också specifikt att $f(x) = f(x+0) = x + f(0)$. Alltså måste $f(x) = x + c$ för något konstant c. Vi sätter in detta i ekvationen och ser att ekvationen gäller för alla c och alltså alla dessa funktioner. ■

■ **Exempel 17** Vi vill hitta alla $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sådana att $f(x)f(y) = f(xy) + x + y$ för alla $x, y \in \mathbb{R}$. Då det gäller för alla $x, y \in \mathbb{R}$ gäller det också specifikt när $x = 0$. Vi sätter in $x = 0$. Då får vi att $f(0)f(y) = f(0) + y$. Det kan inte vara så att $f(0) = 0$ eftersom då skulle $0 = y$ för alla $y \in \mathbb{R}$. Alltså måste $f(y) = \frac{y}{f(0)} + 1$. Om vi nu också sätter in $y = 0$ så får vi att $f(0) = 1$. Alltså har vi att $f(x) = x + 1$. Vi testar att sätta in detta i ekvationen och ser att den uppfylls. Alltså finns det exakt en lösning, vilken är $f(x) = x + 1$. ■

1. Hitta alla funktioner $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sådana att $f(xy) = xf(y)$ för alla $x, y \in \mathbb{R}$.

2. Hitta alla funktioner $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sådana att $f(x)f(y) = xy + f(x) + y$ för alla $x, y \in \mathbb{R}$.

3. Hitta alla funktioner $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sådana att $f(x+y) - f(x-y) = 4xy$ för alla $x, y \in \mathbb{R}$.

6.2 Att skapa fler ekvationer

4. Hitta alla funktioner $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sådana att $f(x) + 2f(-x) = 3 - x$ för alla $x \in \mathbb{R}$. (Ledtråd: Testa att sätta $x = -y$ och få en ny ekvation. Du kan byta variabel tillbaks till x. Nu har du ett ekvationssystem i $f(x)$ och $f(-x)$.)

5. Hitta alla funktioner $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sådana att $x^2 f(x) + f(1-x) = 2x - x^4$ för alla $x \in \mathbb{R}$.

6. **— SMT-kval 2007.** Vilka funktioner $f(x)$ uppfyller likheten

$$x(f(x) + f(-x) + 2) + 2f(-x) = 0$$

för alla reella tal x?

7. **(Svårare)** Hitta alla funktioner $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$ sådana att $f(\frac{1}{x}) + \frac{1}{x}f(-x) = x$ för alla $x \in \mathbb{R} - \{0\}$.

6.3 Injektivt, surjektivt och bijektivt

8. Finns det funktioner $f,g,h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sådana att $f(g(x))=x^3$, $g(h(x))=x^4$ och $h(f(x))=x^5$ för alla $x\in\mathbb{R}$?

9. Hitta alla $f:\mathbb{Z}_{\geq 0}\to\mathbb{Z}_{\geq 0}$ som uppfyller att

$$f(f(f(n)))+f(f(n))+f(n)=3n$$

för alla $n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$. (Ledtråd: Visa att f måste vara injektiv. Vad är $f(0)$?)

10. Hitta alla surjektiva funktioner $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sådana att $f(x)f(y)=f(x+y)+4xy$ för alla $x,y\in\mathbb{R}$. (Ledtråd: Om man vet att en funktion är surjektiv så kan man sätta in c sådant att $f(c)$ har ett specifikt värde.)

11. — SMT-final 2014. Bestäm alla funktioner $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sådana att

$$f(f(x+y)-f(x-y))=xy$$

för alla reella x och y. (Ledtråd: Gör några insättningar och visa att f är surjektiv. Gör några andra insättningar och visa att f inte är surjektiv.)

6.4 Övrigt

12. Ge ett exempel på en funktion $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ sådan att $f(f(x))=x+2$ för alla $x\in\mathbb{Z}$. Kan du hitta en till? Kan du hitta alla?

13. — SMT-final 2008. Funktionen $f(x)$ har egenskapen att $\frac{f(x)}{x}$ är växande för $x>0$. Visa att

$$f(x)+f(y)\leq f(x+y)$$

för alla $x,y>0$.

7. Genererande funktioner I

20:e juli

Teaserproblem

Beräkna följande kvoter med en dator. Ser du några mönster i decimalerna?
Tips: googla "precision calculator".

(a) $\frac{1}{998}$ (b) $\frac{1}{998001}$ (c) $\frac{1}{998999}$ (d) $\frac{1}{997002999}$

Vad är en genererande funktion?

Definition. Låt $(a_n) = (a_0, a_1, a_2, \dots)$ vara en oändlig talföljd. Den genererande funktionen av (a_n) definieras då som den oändliga serien

$$G_a(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$

Exempel 1

Om $(b_n) = (5, 2, 1, 0, 0, 0, \dots)$ så är $G_b(x) = 5 + 2x + x^2$.

Exempel 2

Om $(c_n) = (1, 1, 1, \dots)$ så är $G_c(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$.

Grundläggande egenskaper

Följande egenskaper gäller för alla talföljder (a_n) och (b_n):

Summan av två talföljder

Talföljden$(c_n) = (a_0 + b_0, a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots)$ har den genererande funktionen

$$G_c(x) = G_a(x) + G_b(x).$$

Förskjutning av en talföljd

Talföljden

$$(d_n) = (\underbrace{0, 0, \dots, 0, 0}_{k \text{ st}}, a_0, a_1, a_2, a_3, \dots)$$

har den generererande funktionen $G_d(x) = x^k G_a(x)$.

Ofta när vi diskuterar genererande funktioner så är det faktiskt inte själva funktionerna vi bryr oss om. Vi bryr oss egentligen inte ens om huruvida den oändliga summan konvergerar (närmar sig något tal) eller divergerar (växer mot oändligheten). Vad vi bryr oss om är själva talföljden (a_n). Genererande funktioner visar ett nytt perspektiv på världen av talföljder där nya samband åskådliggörs.

1. Låt (d_n) vara talföljden som börjar med $1, 2, 1, 0, -1, -2, -1, 0$ och upprepar sig var 8:e element.

(a) Vad blir $G_d(x) + x^4 G_d(x)$?

(b) Hitta en sluten formel för $G_d(x)$.

2. **— Formeln för geometriska serier.** Bevisa att

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots = \frac{1}{1-x}$$

för alla tal x för vilka vänsterledet konvergerar.

3. Vilken talföljd (s_n) har den genererade funktionen $G_s(x) = \frac{1}{1-2x}$?

4. Låt h_n beteckna antalet svenskar som är n cm långa. Uppskatta $G_h(0)$ och $G_h(1)$.

5. Vad är den genererande funktionen av talföljden $1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots$

6. Låt $f(x)$ vara den genererande funktionen av en godtycklig talföljd (a_n). Betrakta sedan funktionen $g(x) = \frac{f(x)}{1-x}$. Beskriv talföljden (b_n) vars genererande funktion är $g(x)$.

7. Hitta en genererande funktion för talföljden $(1, 2, 3, 4, \ldots)$.

8. Beräkna den oändliga summan $\dfrac{1}{1} + \dfrac{2}{1000} + \dfrac{3}{1000^2} + \dfrac{4}{1000^3} + \cdots$.

9. Låt P_n beteckna antalet mandariner som behövs för att stapla en tresidig pyramid med n lager. Visa att den genererande funktionen för (P_n) är

$$G_P(n) = \frac{x}{(1-x)^4}.$$

10. Vilken talföljd (r_n) har den genererande funktionen $G_r(x) = \frac{1}{x}$?

11. Talföljden (Q_n) har en genererande funktion som uppfyller $G_Q(0) = 0$ och $G_Q(x) = G_Q(x^2) + x$. Hitta en formel för Q_n.

12. Definiera exponentialfunktionen $\exp(x)$ enligt potensserien

$$\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

(a) Visa att $\dfrac{d}{dx}\exp(x) = \exp(x)$. (Anta att exp går att derivera.)

(b) Visa att $\exp(ax)\exp(bx) = \exp(ax + bx)$.

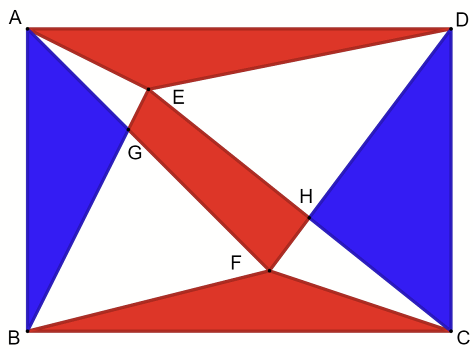
8. Area I. Blandade problem

20:e juli

8.1 Dåligt lagda heltäckningsmattor

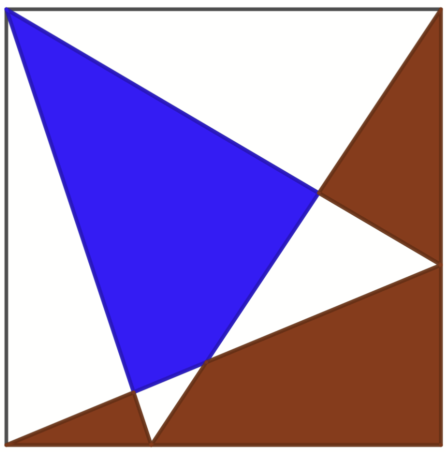
Sats 8.1. Om man i ett rum med arean S lägger heltäckningsmatta med arean S på ett sådant sätt att ingen punkt täcks av mer än två lager, så är arean täckt av två lager lika stor som arean som inte är täckt alls.

1. I Figur 8.1 är E och F godtyckliga punkter i rektangeln $ABCD$ som förbinds med alla rektangelns hörn. Visa att den blåa arean är lika stor som den röda arean.



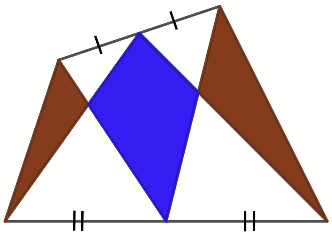
Figur 8.1

2. Vilken area är störst i kvadraten i Figur 8.2, den blåa eller den bruna?



Figur 8.2

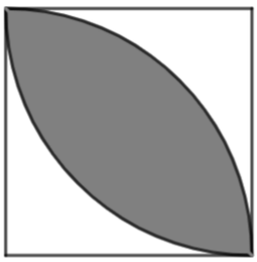
3. Visa att den blåa arean i Figur 8.3 är lika stor som den bruna arean.



Figur 8.3

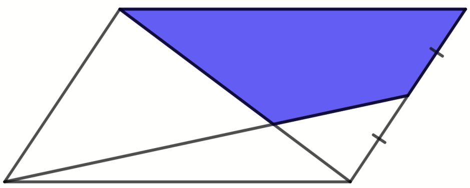
8.2 Övrigt

4. Beräkna arean mellan de två cirkelbågarna i Figur 8.4 om kvadraten har sidlängd 1.



Figur 8.4

5. Beräkna den blåa arean i Figur 8.5 om parallellogrammens totala area är 120 kvadratcentimeter.



Figur 8.5

6. Visa att arean hos en triangel med sidorna a, b och c aldrig överstiger $\frac{ab}{2}$.

7. Visa att arean hos en konvex fyrhörning $ABCD$ aldrig överstiger $\frac{AC \cdot BD}{2}$.

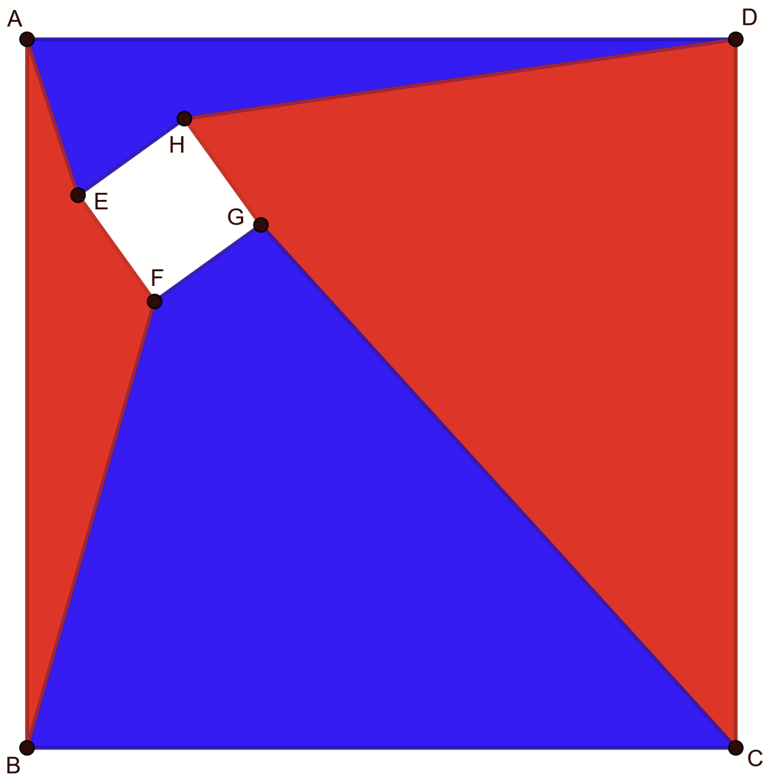
8. Visa att summan av avstånden från en punkt i en liksidig triangel till triangelns sidor endast beror på triangelns sidlängd.

9. Låt $ABCDEF$ vara en regelbunden hexagon. Från en punkt P inuti hexagonen dras sträckor till varje hörn. Visa att $S_{ABP} + S_{CDP} + S_{EFP} = S_{FAP} + S_{BCP} + S_{DEP}$.

10. Inuti en kvadrat $ABCD$ ritas en till kvadrat $EFGH$ på ett sådant sätt att $AEFB$, $BFGC$, $CGHD$ och $DHEA$ är fyrhörningar. Visa

a) att $S_{ABE} + S_{CDG} = S_{BCF} + S_{DAH}$, samt

b) att $S_{ABFE} + S_{CDHG} = S_{BCGF} + S_{DAEH}$. (Se Figur 8.6.)



Figur 8.6

8.3 Identiteter

11. Betrakta följande talföljder:

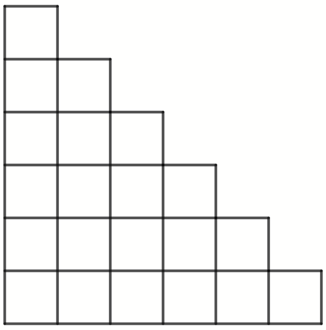
$$T_n = 1 + 2 + \cdots + n$$

$$S_n = T_1 + T_2 + \cdots + T_n$$

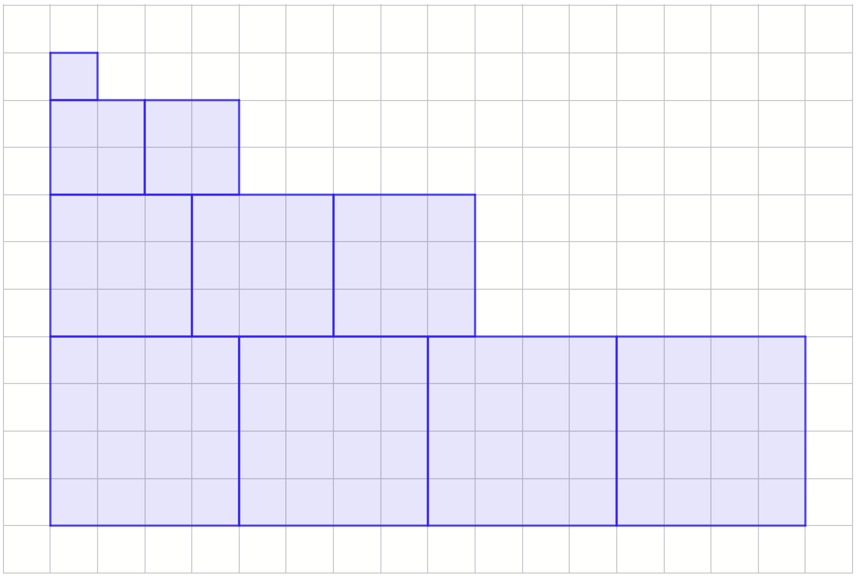
$$K_n = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$$

Genom att klippa och klistra med rutade papper, bevisa följande identiteter:

a) $2T_n = n(n+1)$



Figur 8.7: T_6



Figur 8.8: Summor av kuber

b) $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$

c) $1\cdot n+2\cdot(n-1)+\cdots+n\cdot 1=S_n$

d) $3S_n=T_n(n+2)$

e) $K_n=S_{n-1}+S_n$

f) $2(K_1+K_2+\cdots+K_n)=S_n(n+1)$

g) $1^3+2^3+\cdots+n^3=T_n^2$

9. Genererande funktioner II

21:a juli

Rekursionsformler

En rekursionsformel är en formel för en talföljd i vilken det n:te element definieras utifrån de tidigare. Ett välkänt exempel är Fiboaccis talföljd (F_n) som definieras med basvärdena $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ samt rekursionsformeln

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

som gäller för alla $n \geq 2$. Detta ger talföljden $(0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \dots)$. Under denna lektion får ni utforska rekursionsformler och i synnerhet fibonaccitalen från perspektivet av genererande funktioner.

1. Hitta talföljden vars genererande funktion är $xG_F(x) + x^2G_F(x)$. Använd detta för att hitta en genererande funktion för Fibonaccitalen.

2. Beräkna det exakta värdet av den oändliga summan

$$\frac{0}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{2}{8} + \frac{3}{16} + \frac{5}{32} + \frac{8}{64} + \cdots.$$

Du får anta att den konvergerar.

3. Låt $(U_n) = (1, 3, 5, 7, \dots)$ vara talföljden av de positiva udda talen.

(a) Bevisa att rekursionsformeln $U_n = 2U_{n-1} - U_{n-2}$ gäller för alla $n \geq 2$.

(b) Bevisa att $G_U(x) = \dfrac{1+3x}{x^2 - 2x + 1}$.

(c) Vilka andra talföljder (a_n) uppfyller att $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$?

4. Talföljden (s_n) har den genererande funktionen

$$G_s(x) = \frac{1}{(1-x)(1-3x)}.$$

Härled följande rekursionsformler för (s_n) direkt från $G_s(x)$:

(a) $s_n = s_{n-1} + 3^n$

(b) $s_n = 3s_{n-1} + 1$

(c) $s_n = 4s_{n-1} - 3s_{n-2}$

Hitta sedan de fem första elementen av (s_n).

5. Triangeltalen $(T_n) = 0, 1, 3, 6, 10, 15, 21, \ldots$ definieras enligt rekursionsformeln

$$T_n = T_{n-1} + n.$$

(a) Bestäm $G_T(x)$.

(b) Visa med hjälp av $G_T(x)$ att $T_n = 3T_{n-1} - 3T_{n-2} + T_{n-3}$.

6. **— Binets formel.** Visa att

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Ledning: Hitta den genererande funktionen för högerledet och visa att den är lika med $G_F(x)$.

7. Uppskatta $\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{12}$.

8. Förklara utan induktion varför

$$F_0 + F_1 + F_2 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1.$$

9. Hitta en genererande funktion för talföljden $(F_0, F_2, F_4, F_6, F_8, \ldots)$.

10. En laxpopulation börjar med 50 laxar (år 0) och förökar sig fyrfaldigt varje år. Samtidigt fiskas 100 laxar upp varje år. Finn en formel för antalet laxar år n.

11. Definiera talföljden (j_n) rekursivt enligt formeln

$$\begin{cases} j_0 = 1, \\ j_n = \dfrac{j_0 + j_1 + j_2 + \cdots + j_{n-1}}{2}. \end{cases}$$

Hitta en sluten formel för j_n.

12. **— Catalantal.** Låt C_n beteckna talföljder av n stycken 1:or och n stycken -1:or där alla prefixsummor är icke-negativa. Visa att

$$G_C(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}.$$

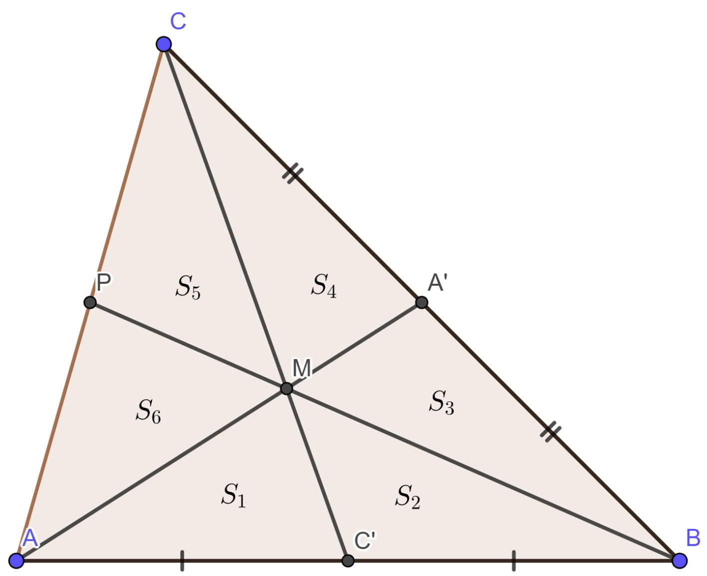
10. Area II. Cevas sats

21:a juli

10.1 Masscentrum

Tips 1 Om du ska visa att tre linjer l_1, l_2 och l_3 går genom en punkt så finns det olika sätt. Ett är att markera skärningspunkten S mellan två av linjerna (l_1 och l_2), dra en till linje genom S, och visa att denna är linje l_3.

Sats 10.1. De tre medianerna i en triangel skär varandra i en punkt M som delar varje median i förhållandet $2:1$. Denna punkt kallas *tyngdpunkten* eller *masscentrum*.



Figur 10.1

1. I detta problem ska vi bevisa Sats 10.1. Vi utnyttjar Tips 1 och ritar Figur 10.1 där AA' och CC' är medianer. Låt P vara skärningen mellan linje BM och linje AC. Vi ska visa att P delar sträcka AC mitt itu.

Sträckorna AM, $C'M$, BM, $A'M$, CM och PM delar triangel ABC i sex delar. Vi kallar deras areor $S_1, S_2, \ldots, S_6$.

a) Hitta fyra par av trianglar med lika stor area.

b) Hitta två par trianglar vars areor förhåller sig som $CP : PA$.

c) Slutför beviset.

10.2 Ett algebraiskt trick

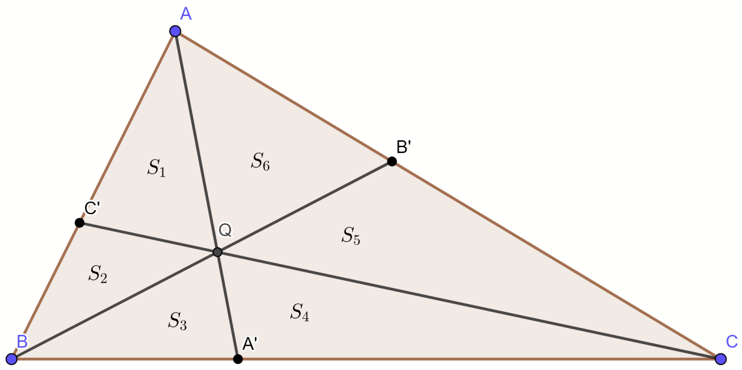
2. Låt $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ och $b, d, b+d \neq 0$. Visa att $\frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b}$ om och endast om $\frac{c}{d} = \frac{a}{b}$.

10.3 Cevas sats

Definition. En cevian är en sträcka från ett hörn i en triangel till en punkt på motstående sida.

Sats 10.2. — Cevas sats. I en triangel ABC skär tre cevianer AA', BB' och CC' varandra i en punkt om och endast om

$$\frac{AC' \cdot BA' \cdot CB'}{C'B \cdot A'C \cdot B'A} = 1.$$



Figur 10.2

3. I detta problem bevisar vi Cevas sats med hjälp av areor.

a) Antag att de tre cevianerna skär varandra i en punkt Q. De delar triangeln i sex trianglar med areor $S_1, S_2, \ldots, S_6$ såsom i Figur 10.2. Visa att $\frac{S_3}{S_4} = \frac{S_1+S_2}{S_5+S_6}$.

b) Dra slutsats.

c) Visa omvändningen, det vill säga att om

$$\frac{AC' \cdot BA' \cdot CB'}{C'B \cdot A'C \cdot B'A} = 1,$$

så skär cevianerna varandra i en punkt.

4. **— Ceva med hjälp av barycentriska koordinater.** Bevisa Cevas sats genom att tolka Q som tyngdpunkten av tre vikter, en på vart och ett av triangelns hörn. Notera

att C' måste vara masscentrum av vikterna i A och B. Hur beräknas masscentrum av två eller tre punkter?

Sats 10.3. — Trigonometriska versionen av Cevas sats. I en triangel ABC skär tre cevianer AA', BB' och CC' varandra i en punkt om och endast om

$$\frac{\sin\angle BAA' \cdot \sin\angle CBB' \cdot \sin\angle ACC'}{\sin\angle A'AC \cdot \sin\angle B'BA \cdot \sin\angle C'CB} = 1.$$

5. Bevisa den trigonometriska versionen av Cevas sats.
6. Antag att de tre cevianerna AA', BB' och CC' möts i Q. Visa att

$$\frac{QA'}{AA'} + \frac{QB'}{BB'} + \frac{QC'}{CC'} = 1.$$

10.4 Liknande satser

7. **— Normaler som skär varandra i en punkt.** Låt ABC vara en triangel och P, Q, R vara punkter i planet. Visa att normalerna från P mot AB, från Q mot BC och från R mot AC skär varandra i en punkt om och endast om

$$AP^2 + BQ^2 + CR^2 = PB^2 + QC^2 + RA^2.$$

8. Låt $ABCDEF$ vara en sexhörning (inte nödvändigtvis regelbunden) inskriven i en cirkel. Visa att diagonalerna skär varandra i en punkt om och endast om

$$AB \cdot CD \cdot EF = BC \cdot DE \cdot FA.$$

(Ledtråd: Använd randvinkelsatsen och hitta likformiga trianglar.)

11. Genererande funktioner III

22:a juli

11.1 Genererande funktioner i kombinatoriken

Definition. $\binom{n}{k}$ betecknar antalet sätt att välja k objekt från n objekt där ordnignen inte spelar roll.

Sats 11.1. — Binomialsatsen.

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n.$$

1. På mattekollo är vi oftast 17 ledare. Låt a_n beteckna antalet sätt att skapa en grupp av n mattekolloledare. Hitta den genererande funktionen för (a_n).

2. Visa med genererande funktioner att

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

3. Bevisa följande identiteter med hjälp av genererande funktioner:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$$

samt

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \cdots = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \cdots$$

4. Beräkna summan

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{n}{k}$$

med hjälp av en genererande funktion. Kan du generalisera ditt resultat?

5. Vissa kombinatorikproblem blir väldigt omständiga att skriva utan genererande funktioner. Para ihop följande kombinatoriska talföljder med rätt genererande funktion. Ett av kombinatorikproblemen har inte sin genererande funktion bland svarsalternativen. Bestäm den genererande funktionen som saknas.

a) Antalet sätt att skriva $n-10$ som en summa av 5:or och 7:or där ordningen inte gör skillnad och där antalet femmor är delbart på 7 och antalet sjuor är delbart på 5.

b) Antalet sätt att skriva n som en summa av 5:or och 7:or där varje siffra färgas i en av tio färger, men ordningen inte spelar roll.

c) Antalet sätt att skriva n som en summa av 5:or och 7:or där varje siffra är färgad i en av 10 färger och ordningen inte spelar roll och ingen femma har samma färg som en sjua.

d) Antalet sätt att skriva n som en summa av 7:or och 5:or där ordningen inte gör skillnad och där du max får ha med 10 av vardera siffra.

e) Antalet sätt att summera 7:or och 5:or där antalet av varje siffra är som max 10 och ordningen inte gör skillnad och där summan som max får vara n.

f) Antalet sätt att skriva n som en summa av 7:or och 5:or så att antalet termer är exakt 10 och ordningen spelar roll.

i) $(1+x^5+x^{10}+\cdots+x^{50})(1+x^7+x^{14}+\cdots+x^{70})$

ii) $\dfrac{x^{10}}{(1-x^{35})^2}$

iii) $(\frac{1}{1-x^5}+\frac{1}{1-x^7}-1)^{10}$

iv) $(x^5+x^7)^{10}$

v) $\dfrac{1}{(1-x^5)^{10}(1-x^7)^{10}}$

6. Förenkla den oändliga produkten

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})\cdots.$$

7. Isa har ett mynt av varje positivt heltalsvärde (en enkrona, en tvåkrona, en trekrona, o.s.v.). Jija har obegrensat många mynt, men bara av udda värden (enkronor, trekronor, femkronor, o.s.v.). Isa och Jija har köpt varsin moped för samma pris. Visa att Isa kan betala för mopeden på precis lika många sätt som Jija.

12. Area III. Bisektriser, tangenter och Ceva

22:a juli

12.1 Bisektriser

Sats 12.1. — Bisektrissatsen. I en triangel ABC delar den inre bisektrisen till vinkel ABC sidan AC i förhållandet $AB : BC$.

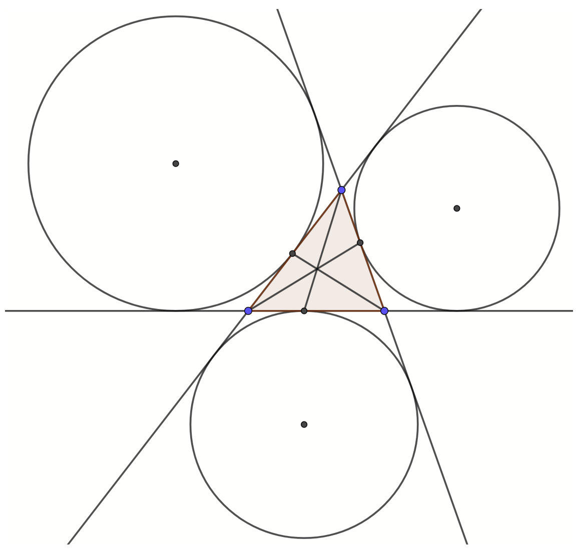
1. I en triangel ABC delar den inre bisektrisen till vinkel ABC triangeln i två trianglar. Bevisa bisektrissatsen genom att beräkna dessa trianglars areor på två olika sätt.

2. Bevisa med hjälp av Cevas sats och bisektrissatsen att bisektriserna i en triangel skär varandra i en punkt. Bevisa detsamma med den trigonometriska versionen av Cevas sats. Hur många bevis kan du nu för detta faktum?

3. Låt M och N vara punkter på sidorna AB respektive BC i en triangel ABC, sådana att $AM = 2$, $BM = 3$ och $BN = 1$. Hur långt är CN om vi vet att AN och CM skär varandra på vinkel ABCs bisektris?

12.2 Den inskrivna och de vidskrivna cirklarna

4. Låt ABC vara en triangel där $AB = c$, $AC = b$ och $BC = a$, och låt punkten A' vara punkten där den inskrivna cirkeln tangerar BC. Uttryck BA' och $A'C$ i a, b, c och $p = \frac{a+b+c}{2}$.



Figur 12.1

5. Låt ABC vara en triangel där $AB = c$, $AC = b$ och $BC = a$. Den vidskrivna cirkeln ω_A är den unika cirkel som tangerar BC och förlängningarna av AC och AB, men

inte sidorna AC och AB. Låt punkten A' vara punkten där ω_A tangerar BC. Uttryck BA' och $A'C$ i a, b, c och $p = \frac{a+b+c}{2}$.

6. **— Extraproblem.** Givet en triangel ABC, konstruera dess vidskrivna cirklar med passare och ograderad linjal.

7. **— Gergonnepunkten.** Visa att cevianerna som förbinder hörnen med den inskrivna cirkelns tangeringspunkt med den motstående sidan skär varandra i en punkt.

8. **— Nagelpunkten.** Visa att cevianerna som förbinder hörnen med den motstående vidskrivna cirkelns tangeringspunkt med den motstående sidan skär varandra i en punkt.

12.3 Isotomiska och isogonala konjugat

9. **— Isotomiska konjugat.** Låt AA', BB' och CC' vara cevianer i triangel ABC som skär varandra i en punkt P. Låt A'' vara speglingen av punkt A' i sträckan BCs mittpunkt. Definiera B'' och C'' på motsvarande sätt. Visa att cevianerna AA'', BB'' och CC'' skär varandra i en punkt Q. Punkterna P och Q kallas för varandras isotomiska konjugat. Visa att Gergonnepunkten och Nagelpunkten är varandras isotomiska konjugat.

10. **— Isogonala konjugat.** Låt AA', BB' och CC' vara cevianer i triangel ABC som skär varandra i en punkt P. Låt cevianen AA'' vara sådan att dess förlängning är en spegling av linje AA' i den inre bisektrisen till vinkel CAB. Definiera cevianerna BB'' och CC'' på motsvarande sätt. Visa att cevianerna AA'', BB'' och CC'' skär varandra i en punkt Q. Punkterna P och Q kallas för varandras isogonala konjugat. Till exempel så skär symmedianerna (speglingarna av medianerna i bisektriserna) varandra i en punkt.

11. I en triangel ABC, visa att höjdernas skärningspunkt H och mittpunktsnormalernas skärningspunkt O är varandras isogonala konjugat.

12. **— Brocardpunkter.** I en triangel ABC, visa att det finns en punkt Br_1 sådan att $\angle ABBr_1 = \angle BCBr_1 = \angle CABr_1 = v$. Visa också att det finns en punkt Br_2 sådan att $\angle BABr_2 = \angle CBBr_2 = \angle ACBr_2 = u$. Dessa kallas *första och andra Brocardpunkterna*. Visa också att $u = v$.

13. Sannolikhetsgenererande funktioner

23:e juli

13.1 Crash course i sannolikhet

Definition. En slumpvariabel X är en variabel vars värde är slumpmässigt. Framöver kommer vi anta att alla slumpvariabler antar icke-negativa heltalsvärden.

Definition. Varje slumpvariabel har en så kallad sannolikhetsfördelning. Det är en talföljd $(p_0, p_1, p_2, p_3, \dots)$ där p_n betecknar sannolikheten att $X = n$. Vi kommer då skriva $X \sim (p_0, p_1, p_2, \dots)$.

Definition. Slumpvariablerna A och B kallas oberoende om värdet på A inte beror på värdet av B eller vice versa.

1. Vad är sannolikheten att summan av två tärningsslag är 7?

2. Hitta två möjliga sannolikhetsfördelningar som de oberoende slumpvariablerna X och Y kan ha givet att $X + Y$ har fördelningen

(a) $(\frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{1}{4})$?

(b) $(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{2}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6})$?

(c) $(\frac{1}{6}, \frac{2}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6})$?

13.2 Sannolikhetsgenererande funktioner

Definition. Den *sannolikhetsgenererande funktionen* av en slumpvariabel A definieras helt enkelt som den genererande funktionen av dess sannolikhetsfördelning.

Exempel:
Om A har sannolikheten $\frac{1}{3}$ att vara 1 och sannolikheten $\frac{2}{3}$ att vara 5 så blir

$$G_A(x) = \frac{x}{3} + \frac{2x^5}{3}.$$

3. Välj en slumpmässig svensk och låt L beteckna hens lön. Uppskatta $G_L(0)$ och $G_L(1)$.

4. Låt slumpvariabeln S beteckna antalet kronor som visas efter tre myntkast. Bestäm och förenkla funktionen $G_S(x)$.

5. Låt A och B vara två oberoende slumpvariabler och låt $C = A + B$. Gäller det då att $G_C(x) = G_A(x) + G_B(x)$? Om ja, motivera varför. Om nej, hitta en annan formel som fungerar.

6. Erik kastar fem fyrsidiga tärningar. Låt P vara det totala antalet prickar som visas upp. Bestäm den sannolikhetsgenererande funktionen $G_P(x)$.

7. På mattekollo går 68 deltagare. Varje elev har sannolikheten $\frac{1}{40}$ att fylla år under kollot. Låt F beteckna antalet elever som fyller år under kollot. Vad är den sannolikhetsgenererande funktionen för F?

8. På morognen dag 1 tappade Ivar bort sin datorladdare. Varje dag finns det en 10% sannolikhet att laddaren blir stulen.

a) Vad är sannolikheten att datorladdaren inte blir stulen de första 9 dagarna som den är borta, men blir stulen exakt på dag 10?

b) Låt slumpvariabel T beteckna dagen då laddaren blev stulen. Bestäm $G_T(x)$.

9. Låt A vara en godtycklig slumpvariabel sådan att $G'_A(1) = 100$ (där $G'_A(x)$ betecknar derivatan av $G_A(x)$). Vad säger detta om A?

10. Per åker på en resa till Frankrike. När han kommit tillbaka visar det sig att en häger har ätit massor av fiskar i hans damm. Låt N (en slumpvariabel) vara antalet dagar som Per är borta. Låt A_k vara antalet fiskar som hägern äter dag k. Anta att $A_1, A_2, \dots, A_N$ är likafördelade och oberoende variabler vars sannolikhetsgenererande funktion är $G_A(x)$. Låt $S = A_1 + A_2 + \cdots + A_N$ vara det totala antalet fiskar som hägern ätit upp under resan. Vilket av följande samband gäller då?

(a) $G_S(x) = G_N(x)G_A(x)$

(b) $G_S(x) = G_N\big(G_A(x)\big)$

(c) $G_S(x) = \dfrac{G_N(x)}{1 - G_A(x)}$

(d) $G_S(x) = G_A(x)^{G_N(x)}$

11. Joshua slår en tärning tills han får en etta. Låt s beteckna summan av alla kast exklusive ettan. Bestäm $G_s(x)$.

12. OBS: Denna uppgift kräver goda kunskaper om gränsvärden. I en skog finns n fåglar och n nybyggda fågelholkar. Varje fågel väljer en slumpmässig fågelholk och övernattar där (oavsett hur många fåglar som redan sover där! Fågelholkar är rymliga.). Betrakta en godtycklig fågelholk och låt A (en slumpvariabel) vara antalet övernattare i den.

(a) Bestäm den genererande funktionen $G_A(x)$.

(b) Hitta en bra uppskattning av $G_A(x)$ ifall n är väldigt stort.

(c) Om n är väldigt stort, uppskatta sannolikheten att fågelholken har exakt 3 gäster.

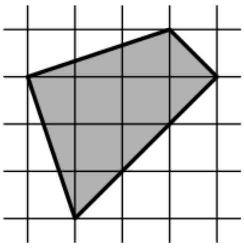
14. Area IV. Picks sats och heltalspunkter

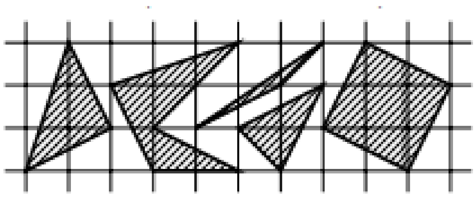
23:e juli

14.1 Introduktion

Definition. Ett tal x är ett halvtal om $2x$ är ett heltal.

1. Beräkna areorna på figurerna nedan. Förklara varför dessa areor måste vara halvtal.





14.2 Picks sats och dess bevis

Definition. En heltalspunkt är en punkt (x, y) i planet där x och y är heltal.

Sats 14.1. — Picks formel. Låt P vara en polygon (inte nödvändigtvis konvex) vars alla hörn är heltalspunkter. Låt i vara antal heltalspunkter som ligger strikt inuti polygonen, och b vara antal punkter som ligger på Ps rand. Då är Ps area lika med $i + \frac{b}{2} - 1$.

2. I detta problem bevisar vi Picks formel.

a) Visa Picks formel för rektanglar.

b) Visa Picks formel för rätvinkliga trianglar vars kateter är parallella med x- och y-axlarna.

c) Låt P och Q vara två polygoner för vilka Picks formel gäller, sådana att P och Q har en sida gemensam och inga andra gemensamma punkter. Visa att Picks formel gäller för $P \cup Q$.

d) Visa att Picks formel gäller för alla trianglar.

e) Visa att Picks formel gäller generellt.

14.3 Tillämpningar av Picks sats

3. Alla heltalspunkter i planet färgas vita eller svarta i ett schackmönster. Visa att om vi väljer tre punkter av samma färg som inte ligger på en linje så har triangeln uppspänd av de tre punkterna heltalsarea.

4. Låt A och B vara heltalspunkter sådana att sträckan AB inte går genom några andra heltalspunkter. Visa att det finns en heltalspunkt C sådan att $S_{ABC} = \frac{1}{2}$.

5. Visa att en triangel vars hörn är heltalspunkter inte kan vara liksidig.

6. Låt ABC vara en triangel med heltalshörn sådan att den endast har en punkt P inuti, och inga heltalspunkter på sidorna. Visa att P är triangel ABCs tyngdpunkt.

7. Låt A, B, C, D och E vara fem heltalspunkter i planet, inga tre på en rät linje. Visa att det finns minst tre olika trianglar med hörn i mängden $\{A, B, C, D, E\}$ som har heltalsareor.

14.4 Övrigt om heltalspunkter

8. Hitta en triangel med heltalshörn vars alla sidlängder är heltal.

9. Finns det en triangel ABC sådan att både A, B, C och bisektrisernas skärningspunkt I är heltalspunkter?

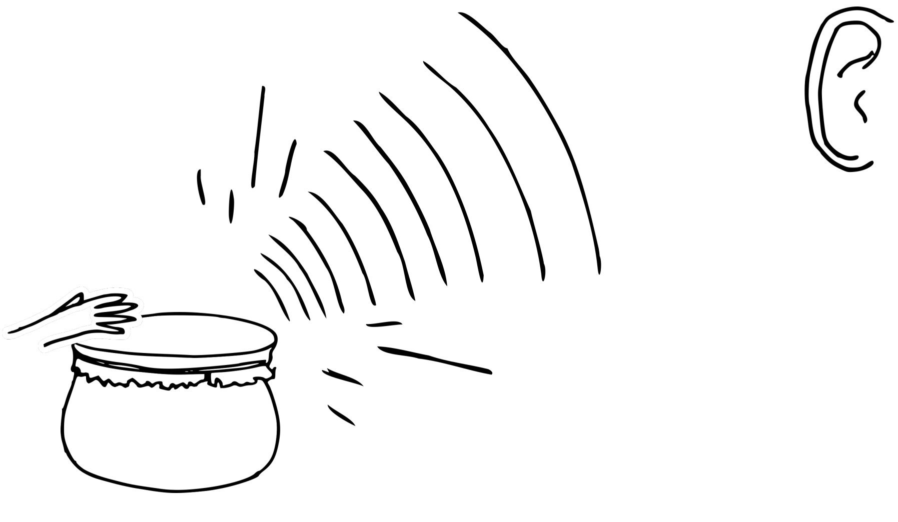
10. Hitta sex heltalspunkter, inga tre på en linje, sådana att alla sträckor mellan två punkter har heltalslängder. Visa dessutom att vi kan hitta godtyckligt många punkter som uppfyller detsamma.

IV

Grupp 4

HEARING THE SHAPE OF A DRUM

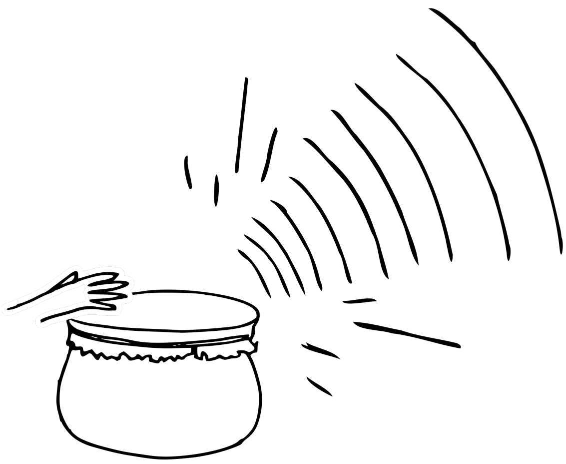
ALEXEI LATYNTSEV

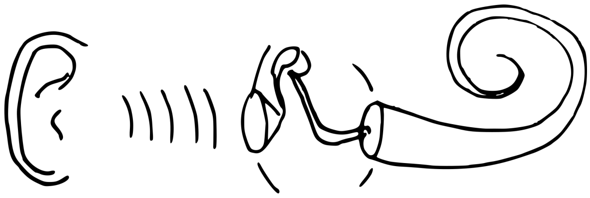


1

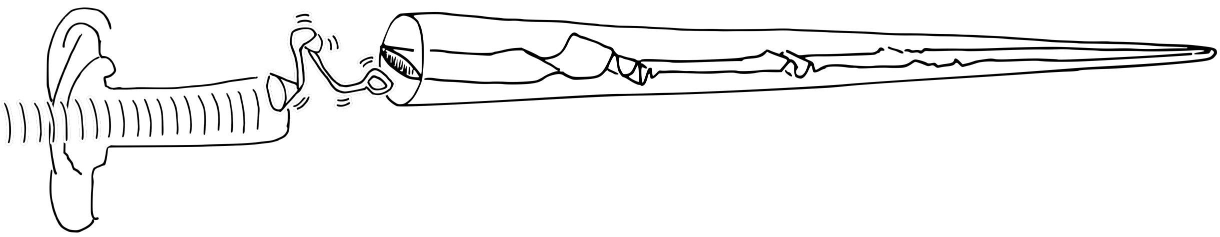
1. Graph Laplacian

1.1. **Hearing drums.** What actually happens when you hear a drum?

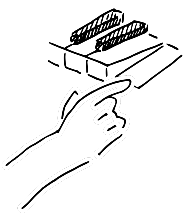


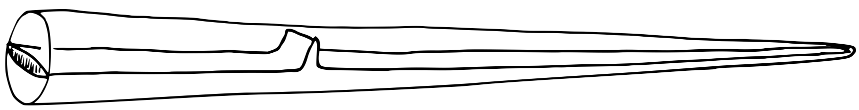


Let's start at the ear. The sound waves hit your ear bones, making them wiggle. Obviously if the sound wave changes, the way it wiggles may change too. The tip of a bone touches a fluid-filled cone with a thin membrane going down its middle. The bone wiggles then make this membrane vibrate. Hairs inside the membrane then send electrical messages to your brain about how they're vibrating.



But here's the crucial thing - *different points along the membrane correspond to different sound frequencies*. So if you play only one note on the piano, only one point on the membrane will start vibrating.[1]

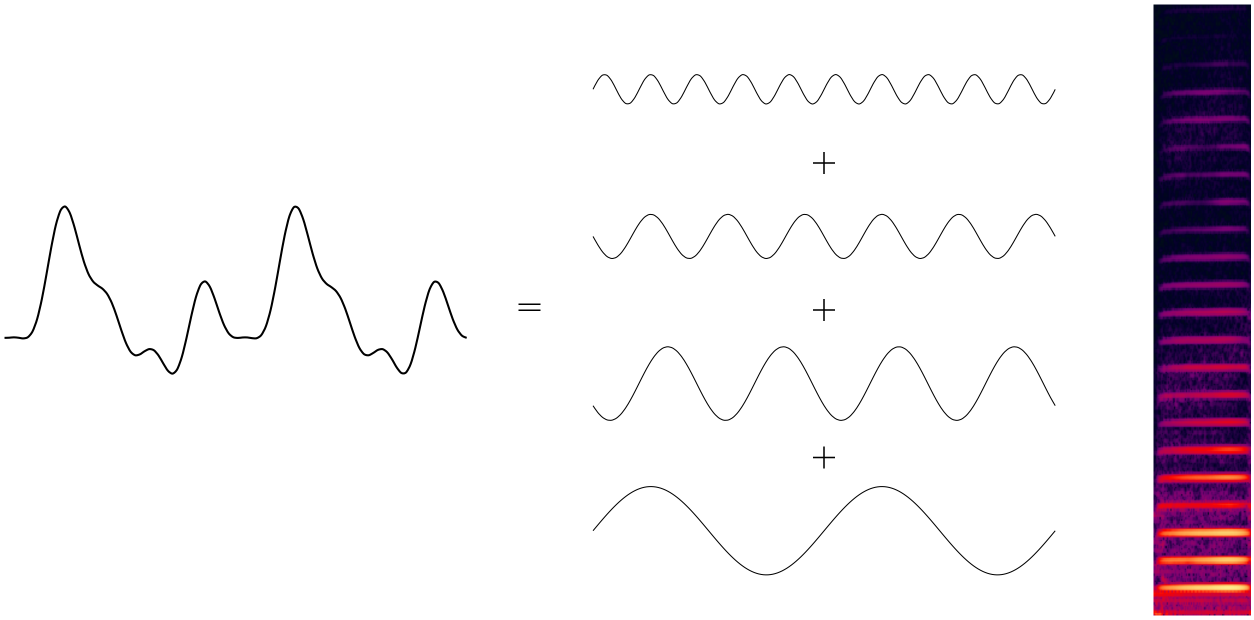




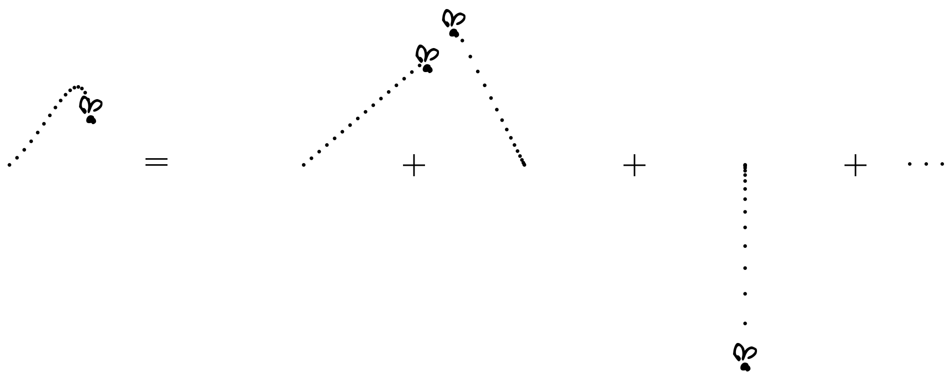
[1]The picture of the piano above was a bit misleading - pressing a piano key doesn't produce a single sine wave, but a sum of a bunch of them, so a bunch of points on the membrane will vibrate.

1.1.1. *Digression.* But what about for a more complicated sound?

A little after Napoleon fell, Joseph Fourier noticed that any[2] function, for instance a sound wave, can be written as a sum of sine waves.[3]



It's a bit like how the motion of a fly can be broken up (*Taylor decomposed*) into its position, velocity, acceleration, and so on.



In other words, we have for any nice enough function $f(t)$

$$f(t) \;=\; f(0) \;+\; f'(0)\cdot t \;+\; f''(0)\cdot\frac{t^2}{2} \;+\; f'''(0)\cdot\frac{t^3}{3!} \;+\; \cdots$$

[2]Actually, any sufficiently nice function.

[3]Below is a picture of the sine waves making up a single violin string's sound wave. The biggest contribution is from $\sin(2\pi\cdot 1400t)$, which vibrates up and down 1400 times a second, and the next biggest ones are $\sin(2\pi\cdot 1400nt)$. In music these notes are called $F_6, F_7, \cdots$.

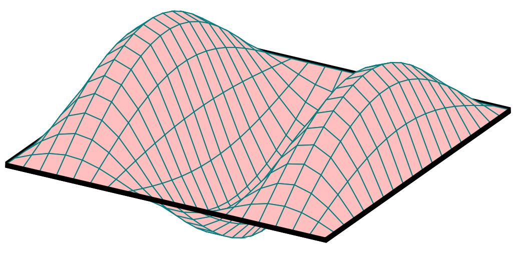
which in the case that $f(t)$ is the position of a fly at time t, $f'(0)$ is the velocity at time zero, $f''(0)$ is the acceleration at time zero, and so on.

Two random examples:

$$\begin{aligned} \sqrt{1+t} &= 1 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{8}t^2 + \frac{1}{16}t^3 - \frac{5}{128}t^4 + \cdots \\ \frac{1}{\sqrt{1+t}} &= 1 - \frac{1}{2}t + \frac{3}{8}t^2 - \frac{5}{16}t^3 + \frac{35}{128}t^4 + \cdots \end{aligned}$$

1.1.2. So, a nice periodic function $\psi(t)$ can be broken up (*Fourier decomposed*) into a sum of $\sin(nt)$ and $\cos(nt)$'s over all integers n.[4]

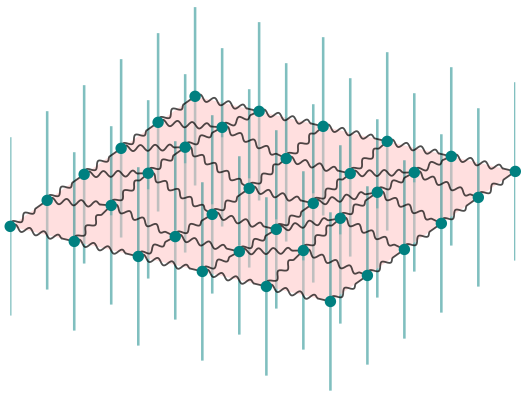
1.1.3. *How does a drum produce sound?* The drum membrane vibrates up and down, bumping into the air particles periodically, making a sound wave. The membrane going up and down n times a second produces the sound wave $\sin(2\pi \cdot nt)$.



But the drum membrane's motion is actually quite complicated! Let's try to understand it.

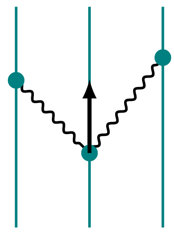
First, let's model the graph as a bunch of balls, only allowed to move up and down, and are connected by springs.

[4]If nice $\psi(t)$ is non-periodic then this result is still true, but n is now an arbitrary real number, and the sum is replaced by an integral.



Assume that that ℓ, the difference between the natural length of the spring and the distance on the graph between the two balls, is nonzero $\ell \neq 0$. (need to assume it's 1, let's do the weighted version of the graph Laplacian later)

1.1.4. What is the vertical force on the balls?



Assume the resting length of the spring is L and neighbouring poles are distance 1 away from each other.

Answer: Using Hooke's law, the force on the ball at x is

$$\sum_{y\sim x} \frac{f(y)-f(x)}{\sqrt{1+(f(y)-f(x))^2}}(\sqrt{1+(f(y)-f(x))^2}-L)$$
$$= \sum_{y\sim x}(f(y)-f(x))\left((1-L)-\frac{1}{2}(f(y)-f(x))^2+\frac{3}{8}(f(y)-f(x))^4+\cdots\right)$$

1.1.5. Let

$$\rho(x,t) \; = \; \textit{height of ball } x \text{ at time } t.$$

Conclude that $\rho(x,t)$ (approximately, if $\rho(x)$ is always small) satisfies the *wave equation*,

$$\partial_t^2\rho(x,t) \; = \; \sum_{y\sim x}(\rho(y,t)-\rho(x,t))$$

if all balls have mass one and $L = 0$.

Answer: Apply Newton's Law to the above.

We use $-\Delta\rho(x,t)$ as a shorthand for the right hand side, and Δ is called the *graph Laplacian*.

1.1.6. *Remark.* Note that when $L = 1$ the resting position of the springs are not under tension. Show that the the first-order equation satisfied is $\partial^2\rho = 3(\partial\rho)^2\partial^2 f$ or something similar, i.e. is nonlinear.

1.1.7. Now show that for any number λ, if

$$\lambda\rho_\lambda(x) \;=\; \Delta\rho_\lambda(x)$$

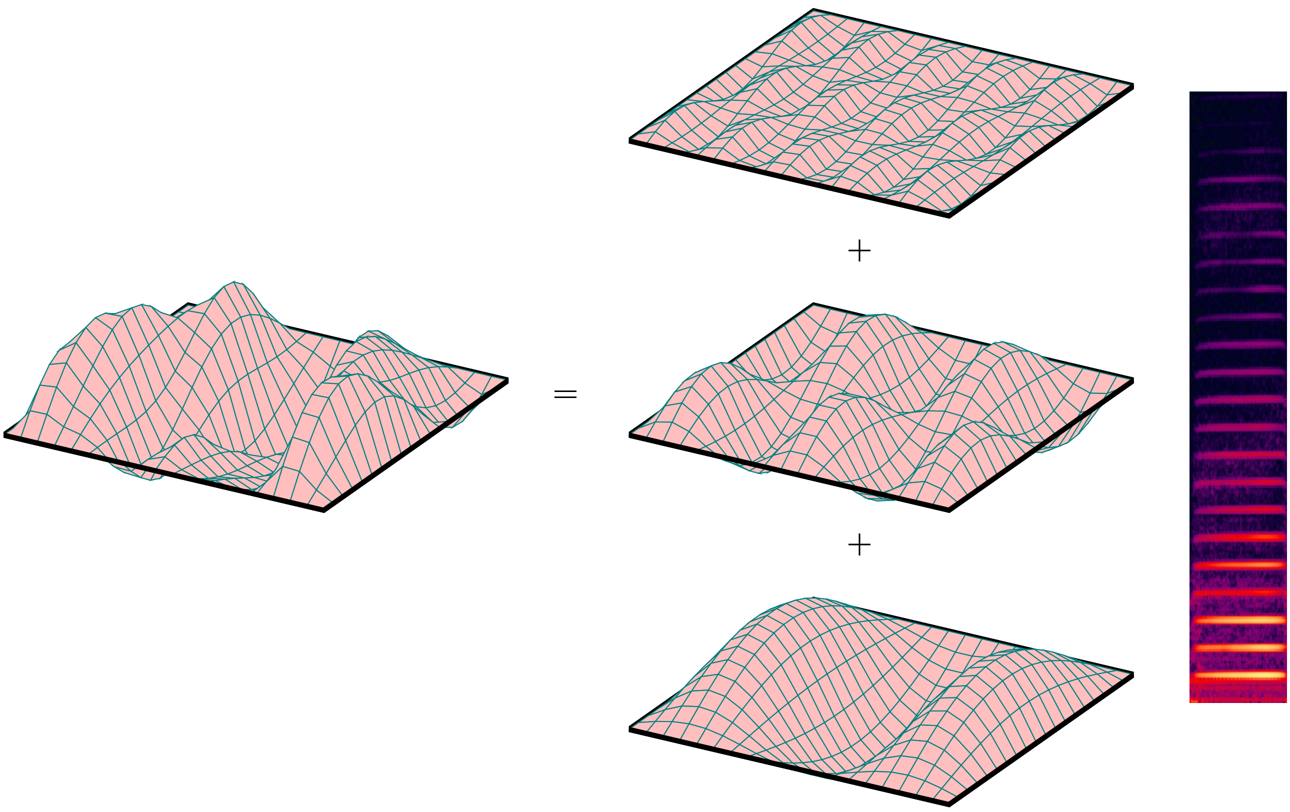
then $\rho(x,t) = \cos(t/\sqrt{\lambda}) \cdot \rho_\lambda(x)$ satisfies the wave equation,

$$\partial_t^2\rho(x,t) \;=\; \Delta\rho(x,t).$$

Conclude that

$$\rho(x,t) \;=\; A_0 \;+\; \sum_{\lambda\neq 0} A_\lambda \cos(t/\sqrt{\lambda}) \cdot \rho_\lambda(x)$$

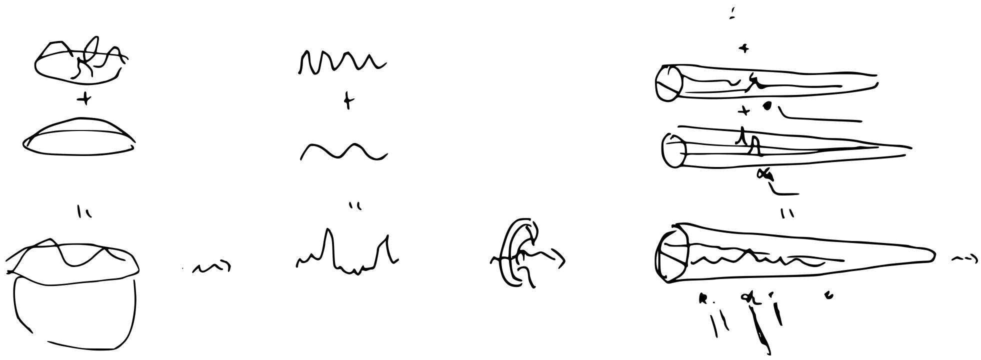
also satisfies the wave equation for any collection of numbers A_λ.



The ρ_λ are called the *eigenfunctions* of the graph Laplacian, and λ is its *eigenvalue*. Thus the frequency of the sound wave produced by the drum is $\sqrt{\lambda}$.

1.1.8. Show that if $\lambda \neq 0$ then $\sum_x \rho_\lambda(x,t) = 0$. Conclude that A_0 is the average value of $\rho(x,t)$.

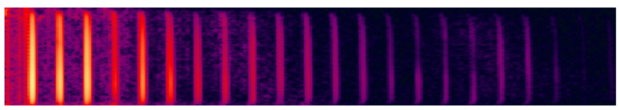
1.1.9. *Summary.*



1.2. **Examples!** This is the main problem section of this lesson. You can try them in any order, but try not to jump between problems too much if you're stuck.

(1) What is the graph Laplacian for the line graph?

Find all its eigenfunctions and eigenvalues. If you hit this graph with a hammer, what would you hear? Draw its spectrum (it has two eigenvalues)



Answer: The eigenfunctions are $(1,1)$ and $(1,-1)$, with eigenvalue 0 and 2.

(2) Now try the same thing with the three point graph:

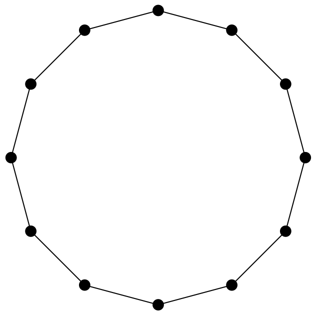
(3) What about a line with n balls?

Answer: The eigenvalues are $2 - 2\cos(\pi i/n)$. Indeed, if

$$(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n)$$

is an eigenvector with eigenvalue λ, then

(4) What about a circle?



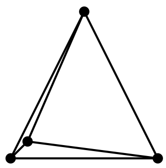
Hint: Show that

$$(\alpha, \alpha^2, ..., \alpha^{n-1})$$

is, for certain α, an eigenvector of Δ.

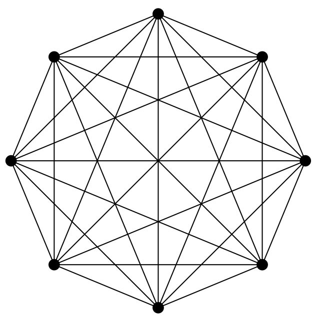
Answer: The eigenvalues are $2 - 2\cos(2\pi i/n)$.

(5) What about the tetrahedron?



Answer: The eigenvalues are $0, 4, 4, 4$.

(6) More generally, about the n-dimensional version of the tetrahedron, the complete graph K_n?



Again, what are all the frequencies you'd hear if you hit hit this graph with a hammer, where the distances on all edges are assumed to be equal?

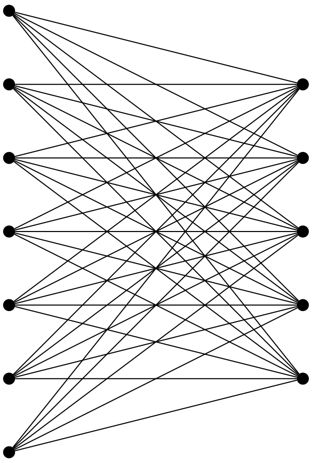
If $\rho(x)$ is an eigensolution with eigenvalue λ, show that

Answer: Apart from the constant function (which has eigenvalue 0) and if i, j are any two vertices then

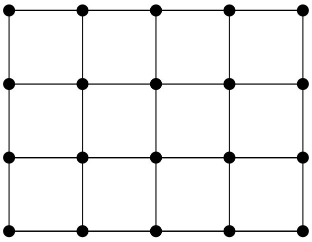
$$\delta_i - \delta_j$$

has eigenvalue -2. There are $n-1$ linearly independent of these, $\delta_1 - \delta_j$.

(7) What about the bipartite graph $K_{m,n}$?

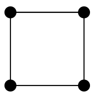


(8) What about the product of two graphs? Say, the rectangle graph:



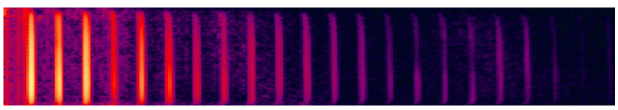
(9) What about if we used a square tiling of the torus?

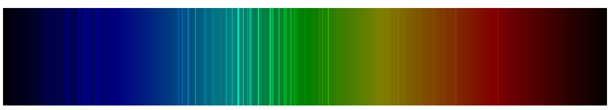
(10) As a way to check your answers, notice that the 2×2 square graph is also a circle graph and a bipartite graph. Make sure your above answers for those match in this case



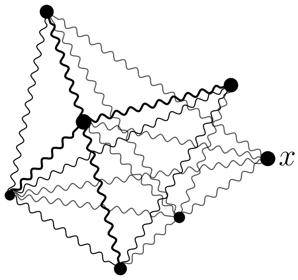
1.3. **Vibrations in many dimensions: seeing the colour of a molecule.** There is a strong analogy between colour and sound.

(picture - hammer to light, drum to molecule analogy)





Consider a toy model of an atom, of balls at fixed in space and joined by springs:



If you push a ball, the springs around it make it vibrate.

We now let each of the balls vibrate in any direction, not just up and down. Because of this, we let

$$\rho(x) \ = \ (\rho(x)_1, \rho(x)_2, \rho(x)_3)$$

be the displacement of the ball x from its rest position. As before, show that we have

$$\partial_t^2 \rho(x,t) \ = \ \sum_{y \sim x} (\rho(y,t) - \rho(x,t))$$

where the sum is over all balls y connected to x by an edge. This is the wave equation in 3D.

2. Bees and the heat equation

2.1. **Linear algebra.** Let Γ be a graph, representing a drum. What does the set of functions on that graph

$$V = \{\rho : \Gamma \to \mathbf{R}\}$$

have the structure of? Well, it's got whatever structure **R** has:[5]

A. You can add two functions: if ρ, ρ' are functions, then $\rho + \rho'$ is another function.

B. We have $\rho + \rho' = \rho' + \rho$.

C. There's an element $0 \in V$ (in this example it's the function that's zero everywhere) that has $0 + \rho = \rho$.

D. You can multiply a function by a number: if $r \in \mathbf{R}$ and ρ is a function, then $r\rho$ is another function.

Any set with these properties/structure is called a *vector space*.

2.1.1. What structure does the Laplacian Δ have? It's a function

$$\Delta : V \to V \qquad \rho(x) \mapsto \Delta(\rho)(x) = \sum_{y \sim x} (\rho(y) - \rho(x))$$

and we have

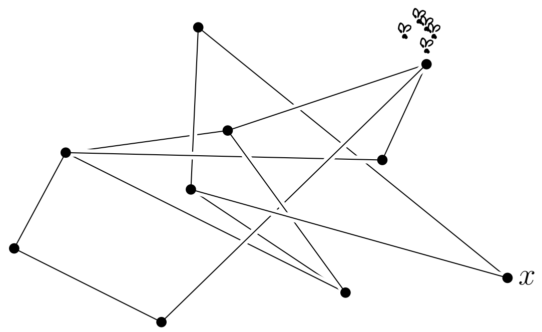
A. $\Delta(0) = 0$,

B. $\Delta(\rho + \rho') = \rho + \rho'$,

C. $\Delta(r\rho) = r\Delta(\rho)$.

Any function between any two vector spaces with these properties is called a *linear map*.

2.2. **Bees!** Release a million bees at one point on the graph!! Every minute all bees individually each choose a random neighbouring point of the graph and fly there.



[5]Let's ignore multiplication for now.

A concerned citizen asks - how long does it take them to spread out approximately equally throughout the graph?

2.2.1. If $b(x,t)$ is the number of bees at x after t minutes, show that it satisfies the *heat equation*

$$b(x,t+1) = \sum_{y\sim x} \frac{1}{deg(y)} b(y,t)$$

where we sum over all points y connected to x by an edge. Alternatively,

$$\partial_t b(x,t) = \sum_{y\sim x} \left(\frac{1}{\deg(y)} b(y,t) - \frac{1}{\deg(x)} b(x,t) \right)$$

2.2.2. Show that if $\rho_\lambda(x)$ satisfies

$$\Delta \rho_\lambda(x) = \lambda \rho_\lambda(x),$$

i.e. an eigensolution of the weighted Laplacian with eigenvalue λ.

(1) Show that $\lambda \leqslant 1$.

(2) Show that if $\lambda \neq 0$, then

$$\sum_x \rho_\lambda(x) = 0.$$

(3) Conclude that the number of bees is

$$b(x,t) = 1000000 + \sum_{\lambda\neq 0} A_\lambda \lambda^t \rho_\lambda(x,t)$$

for some constants A_λ.

2.2.3. Let us list the eigenvalues of the random walk Laplacian $P = LD^{-1}$ in increasing order:

$$\lambda_1 = 0 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_k.$$

Argue that how quickly the bees spread out is related to the smallest non-zero eigenvalue λ,

$$|b(x,t) - 1000000| \leqslant C\lambda_2^t$$

for some constant C.

Note that this is the frequency of the lowest note you hear if you bit the graph with a hammer.

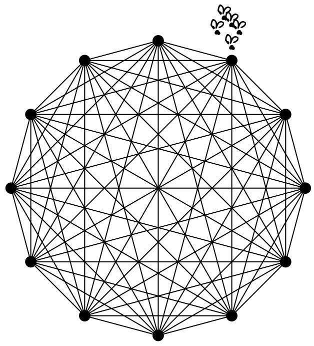
2.2.4. Conclude that for the complete graph K_n we have

$$|b(x,t) - 1000000| \leqslant C(2/(n-1))^t$$

for some constant t. i.e. the bees' rate of spread will be approximately $(4/(n-1))^t$ after t minutes.

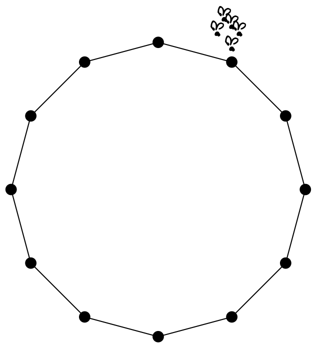
2.3. **Exercises.** Work out how quickly bees spread out on the following graphs, i.e. find the second smallest eigenvalue of the random walk Laplacian P.

(1) How quick do bees spread over the complete graph K_n?



Answer: The eigenvalues of $P = LD^{-1} = L(n-1)^{-1}$ are 0 and $2/(n-1)$.

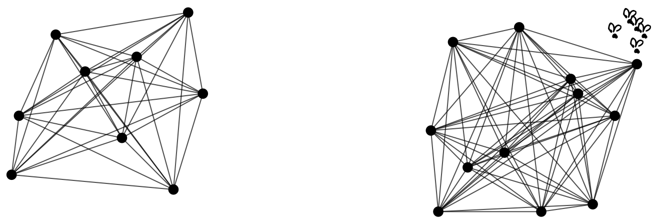
(2) How quick do bees spread over the circle?



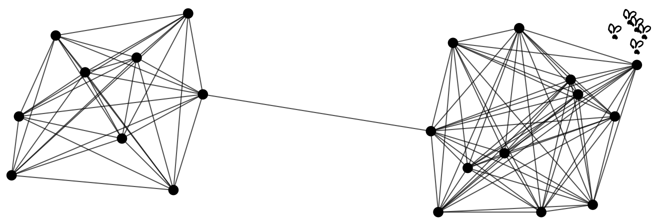
(3) What about the length n line?

3. Telephones, electricity and bees

3.1. **Conductance.** If we release bees on a disconnected graph, they will only spread out on the component we released them on.



Now, if it is connected with just *one* edge, we should expect that they will spread only *really slowly*



To measure how disconnected a graph is, we can use the *conductance*[6]

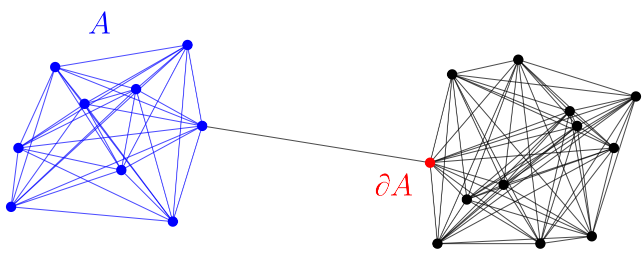
$$h(\Gamma) = \min_A \left\{ \frac{|\partial A|}{|A|} \right\}$$

where $A \subseteq \Gamma$ varies over nonempty subsets of Γ with size at most half and ∂A are the vertices neighbouring (but not in) A.

3.1.1. Show that the conductance of the complete graph K_n is $h(K_n) = 1/(n-1)$.

3.1.2. What is the conductance of the line and circle graphs?

3.1.3. Consider the graph we drew above. Let the two above blobs have size n, m, and every pair of vertices within a blob are connected by an edge.



Show that the conductance for this graph is

$$h(\Gamma) = \max \left\{ \frac{1}{n}, \frac{1}{m} \right\}$$

[6]Also called *Cheeger's constant*.

and that for A as above, $|\partial A|/|A|$ is this value.

3.2. **Linear algebra.**

3.2.1. For a vertex $x \in \Gamma$, let δ_x denote the function which is 1 at x and 0 elsewhere.

Show that every function $f \in V = \text{Fun}(\Gamma)$ is a linear combination of these:

$$f = c_{x_1}\delta_{x_1} + \cdots + c_{x_n}\delta_{x_n}$$

where $c_i \in \mathbf{R}$ are constants and x_i are all the vertices of Γ.

3.2.2. Show that a linear map

$$\alpha : V \to V$$

is uniquely determined by its values $\alpha(\delta_x)$, i.e. given functions $f_1, \ldots, f_n$ there is a unique linear map α such that $\alpha(\delta_{x_i}) = f_i$.

If $f_i = c_{1i}\delta_1 + \cdots + c_{ni}\delta_n$, we can arrange this data into a matrix:

$$\alpha = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}.$$

3.2.3. Show that if $\alpha, \beta : V \to V$ are two linear maps, then their composition $\alpha \cdot \beta$ and sum $\alpha + \beta$ are also linear maps. What is the matrix of $\alpha \cdot \beta$ and $\alpha + \beta$?

3.2.4. We define the *adjacency* linear map A by

$$A(\delta_x) = \sum_{y \sim x} \delta_y.$$

If λ is an eigenvalue of A, show that $\lambda \leqslant \max\{\deg(x)\}$.

3.2.5. Recall that we say a function $\Psi(x,t)$ of time $t \in \mathbf{R}$ and point on the graph $x \in \Gamma$ satisfies the *wave equation* if

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^2 \Psi(x,t) = \sum_{y \sim x} (\Psi(y,t) - \Psi(x,t)) \tag{1}$$

and the *heat equation* if

$$\Psi(x,t+1) - \Psi(x,t) = \sum_{y \sim x} \frac{1}{\deg(y)} \Psi(y,t) - \Psi(x,t). \tag{2}$$

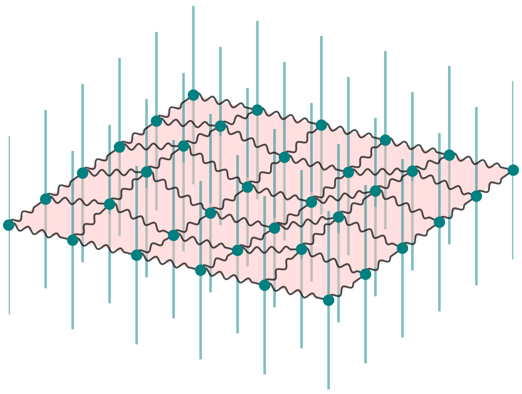
Show that the map

$$f(x) \mapsto (-\Delta f)(x) = \sum_{y \sim x} (f(y) - f(x))$$

is a linear map with $-\Delta = A - D$, and

$$f(x) \mapsto (Pf)(x) = \left(\sum_{y \sim x} (\frac{1}{\deg(y)} f(y)\right) - f(x)$$

is a linear map with $P = A \cdot D^{-1} - \mathrm{id}$. Here id is the identity linear map sending all functions to themselves, and D is the linear map with $D(\delta_x) = \deg(x)\delta_x$.



3.3. **Isoperimetric inequality.** In this section, we will prove

Proposition. *For any graph* Γ *we have*

$$2h(\Gamma) \geqslant \lambda_2$$

where λ_2 *is the smallest nonzero eigenvalue of the Laplacian* $\Delta = D - A$.

Define the *size* of $f \in V$ as

$$\langle f, f \rangle = \sum_{x \in \Gamma} f(x)^2.$$

More generally, we define the *inner product* $\langle f, g \rangle$ as the sum of $f(x)g(x)$ over all $x \in \Gamma$.

3.3.1. Show that for all f,

$$\langle f, \Delta f \rangle \geqslant 0.$$

Next, prove that we have > 0 if neither f nor Δf are zero.

3.3.2. Conclude that all eigenvalues of Δ are nonnegative.

3.3.3. Given that every function f is a sum of eigenfunctions, show that if the average of f on each connected component is zero, that

$$\frac{\langle f, \Delta f \rangle}{\langle f, f \rangle} \geqslant \lambda_2.$$

3.3.4. By picking a suitable f, finish the proof of the isoperimetric inequality.

3.4. **Examples.** Having computed the conductance $h(\Gamma)$ for your favourite graphs, comment on how quickly flies will spread around the graph.

3.5. **Note.** More generally, we have

Theorem 3.5.1. (Cheeger's inequality) *We have*

$$2h(\Gamma) \geqslant \lambda_2 \geqslant \frac{1}{2}h(\Gamma)^2$$

where λ_2 is the smallest nonzero eigenvalue of the Laplacian.

The final exercise is to in class read [Ch], ask for help if you get to here.

2. Gruppteori I. Introduktion

20:e juli

Definition. En *grupp* G är en mängd M tillsammans med en operator $\star$ så att:

1. För alla två element a, b i M definierar $\star$ ett element $a \star b$ som också är i M.
2. För alla tre element a, b, c i M är $(a \star b) \star c = a \star (b \star c)$.
3. Det finns ett *identitets element* e så att för alla a i M så är $a \star e = e \star a = a$.
4. Varje element a i M har en *invers* a^{-1} så att $a \star a^{-1} = a^{-1} \star a = e$.

1. Motivera att kraven för en grupp uppnås av **(a)** heltalen under addition **(b)** rotationer av en hexagon som bevarar den under sammansättning **(c)** drag på en Rubiks kub under sammansättning.

2. Motivera att kraven på en grupp **inte** uppnås av **(a)** udda heltalen under addition **(b)** heltalen under multiplikation **(c)** heltalen under operationen $a \star b = a \cdot b + 1$.

3. Mängden M består av "klä om strumpan"-operationer:

1. Lämna allt som det är.
2. Ta av och klä på andra foten.
3. Ta av, vänd ut och in och klä på samma fot.
4. Ta av, vänd ut och in och klä på andra foten.

Från början har man en strumpa på en av fötterna och man har två fötter. Visa att M under sammansättning av operationerna är en grupp!

4. Låt mängden $M = \{e, a, b\}$ och operatorn $\star$ uppfylla multiplikationstabellen

$\star$	e	a	b
e	e	a	b
a	a	e	b
b	b	a	e

Är $G = (M, \star)$ en grupp?

5. **(Dihedrala grupper).** Den *dihedrala* gruppen D_n är alla rotationer och speglingar av en regelbunden n-hörning som avbildar den på sig själv. I den dihedrala gruppen D_4:

(a) Vilka är de fyra rotationerna i gruppen?

(b) Vilka är de fyra speglingarna?

(c) Vilket är identitetselementet?

6. **(Dihedrala grupper).** Skapa en multiplikationstabell för elementen i D_3!

Definition. Låt a vara ett element i en grupp och i ett heltal. Då är

$$a^i = \begin{cases} \underbrace{a \star \cdots \star a}_{i \text{ gånger}} & \text{om } i > 0 \\ \underbrace{a^{-1} \star \cdots \star a^{-1}}_{i \text{ gånger}} & \text{om } i < 0 \\ e & \text{om } i = 0 \end{cases}$$

7. **(Dihedrala grupper).** Låt S vara en bestämd spegling och R vara den "kortaste" rotationen medurs i D_n. Kan alla element i D_n skrivas på antingen formen R^i eller $S \cdot R^i$ där i är ett heltal?

8. Låt a, b vara element i en grupp. Visa att $(a \star b)^{-1} = b^{-1} \star a^{-1}$.

9. **(Tavla).** Vi vill hänga en tavla med ett snöre (vars ändar är i tavlan) på två spikar. Till skillnad från vanligt, vill vi att om man tar bort någon spik (oavsett vilken) så ska tavlan ramla! Hur gör vi detta?

10. **(Tavla).** Hur gör vi om tavlan ska hänga på n spikar så att tavlan ramlar oavsett vilken spik vi tar bort?

11. Visa att om a, b, c är element i en grupp så innebär $a \star b = a \star c$ att $b = c$.

12. **(Rubiks kub).** Visa att repeterad applicering av ett godtyckligt drag på en Rubiks kub kommer leda tillbaks till var den började.

13. **(Rubiks kub).** Visa att inget drag på en Rubiks kub, om det appliceras repeterat, kommer att gå igenom varje möjlig position.

14. **(Kortlek).** Kan man göra samma slutsatser som vi gjorde om dragen på en Rubiks kuben på en blandning av en kortlek?

Extrauppgifter

15. Visa att identitetselementet är unikt.
16. Visa att varje element har exakt en invers.
17. Visa att snittet av två grupper är en grupp.
18. Hitta två grupper av samma storlek som "beter sig" annorlunda.

3. Gruppteori II. Isomorfier & delgrupper

21:a juli

Definition. En *isomorfi* φ mellan grupperna G_1 och G_2 är en kartläggning (funktion) så att:

1. Varje element i G_2 antas som värde av φ för exakt ett element i G_1.
2. För alla a, b i G_1 gäller $\varphi(a) \star \varphi(b) = \varphi(a \star b)$.
3. För identitetselementen e_1, e_2 i G_1 respektive G_2 gäller att $\varphi(e_1) = e_2$.

1. Gruppen G_1 av "klä om strumpan"-operationer (från förra lektionen), består av operationerna: "gör inget", "byt fot", "vänd ut och in", "vänd ut och in och byt fot". Gruppen G_2 består istället av mängden $\{e, a, b, c\}$ och operatorn $\star$ som uppfyller multiplikationstabellen

$\star$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

Hitta en isomorfi mellan G_1 och G_2.

2. Visa att D_3 är isomorf med permutationsgruppen S_3, mängden av alla omordningar av 3 element.

3. Motivera att gruppen av rotationer av en kub är isomorf med permutationsgruppen S_4.

Definition. En grupp G kallas *cyklisk* om det finns ett element a i G så att mängden till G är exakt potenserna till a.

4. **(Cykliska grupper).** Visa att heltalen modulo n under addition är cykliska.

5. Grupperna G_1, G_2 kallas isomorfa om det finns en isomorfi mellan dem. Visa att om G_1 är isomorf med G_2 och G_2 är isomorf med G_3 så är G_1 isomorf med G_3.

6. **(Cykliska grupper).** Visa att alla cykliska grupper av storlek n är isomorfa med varandra och inga andra.

Definition. Låt $H = (M_H, \star)$ och $G = (M_G, \star)$ vara grupper. H är en *delgrupp* till G om M_H är en delmängd till M_G.

7. Är mängden av alla **(a)** speglingar **(b)** rotationer en delgrupp av D_n?

8. Hitta 4 delgrupper till dragen på en Rubiks Kub som har olika storlek.

9. Låt φ vara en isomorfi från G_1 till G_2 och och $H_1 = (\{a_1, \ldots, a_n\}, \star)$ vara en delgrupp till G_1. Visa att $H_2 = (\{\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_n)\}, \star)$ är en delgrupp till G_2.

10. Hitta en delgrupp av S_4 som är isomorf med "klä om strumpan"-gruppen.

Extra uppgifter

Definition. För två grupper G_1, G_2 definieras den *direkta produkten* $G_1 \times G_2$ som gruppen där:

1. Elementen är mängden av alla par (a_1, a_2) där a_1, a_2 är element i G_1 respektive G_2.
2. Operatorn appliceras elementvist enligt $(a_1, a_2) \star (b_1, b_2) = (a_1 \star b_1, a_2 \star b_2)$.

11. **(Direkta produkten).** Låt $G = \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_5$ under addition. Vad är inversen till $(2, 0)$?

12. **(Direkta produkten).** Låt $\mathbb{Z}_n$ vara heltalen modulo n. Är **(a)** $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ isomorf med $\mathbb{Z}_4$ **(b)** $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ isomorf med $\mathbb{Z}_6$?

13. **(Direkta produkten).** Visa att $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ under addition är isomorf med "klä om strumpan"-gruppen.

14. Är de rationella talen under addition isomorfa med de nollskilda rationella talen under multiplikation?

15. Är heltalen under addition isomorfa med de rationella talen under addition?

16. Är de rationella talen under addition isomorfa med de reella talen under addition?

4. Gruppteori III. Delgrupper & sidoklasser

22:a juli

1. Hitta en delgrupp av permutationsgruppen S_4 som är isomorf med "klä om strumpan"-gruppen.

2. Gruppen G består av mängden $\{e, \pi, \tau\}$ och operatorn $\star$ som uppfyller multiplikationstabellen

$\star$	e	π	τ
e	e	π	τ
π	π	τ	e
τ	τ	e	π

Hitta en isomorfi från G till en delgrupp av S_3.

3. Hitta en isomorfi från den dihedrala gruppen D_4 till en delgrupp av permutationsgruppen S_8.

Sats 4.1. (Cayleys sats). Varje grupp är isomorf med en delgrupp till någon permutationsgrupp S_n.

4. Låt G vara gruppen i problem 2. Visa att $f(x) = \pi$ permuterar elementen i G.

5. Bevisa Cayleys sats konstruktivt.

6. Hitta alla grupper av storlek **(a)** 3 **(b)** 4.

Definition. Låt $H = \{h_1, h_2, \ldots, h_n\}$ vara en delgrupp av G. För varje element a i G definierar vi *sidoklassen* $a \star H = \{a \star h_1, a \star h_2, \ldots, a \star h_n\}$.

7. Vilka är sidoklasserna till delgruppen av rotationer i den dihedrala gruppen D_4?

8. Vilka är sidoklasserna till delgruppen av $(\{e, S\}, \star)$ i den dihedrala gruppen D_4 om S är en specifik spegling?

9. Observera gruppen av heltal under addition. Vilka är sidoklasserna till delgruppen av tal delbara med 7?

10. Låt M vara en delgrupp till G med k element. Hur många element har $a \star M$?

11. Finns det något element som inte är i någon sidoklass?

12. Visa att om två sidoklasser till samma delgrupp båda innehåller ett visst element så sammanfaller de.

13. **(Lagranges sats).** Visa att för en ändlig grupp G och en delgrupp H måste storleken av H dela storleken av G.

5. Gruppteori IV. Lagranges sats

23:e juli

Definition. Låt $H = \{h_1, h_2, \ldots, h_n\}$ vara en delgrupp av G. För varje element a i G definierar vi *sidoklassen* $a \star H = \{a \star h_1, a \star h_2, \ldots, a \star h_n\}$.

1. Låt M vara en delgrupp till G med k element. Hur många element har $a \star M$?

2. Finns det något element som inte är i någon sidoklass?

3. Visa att om två sidoklasser till samma delgrupp båda innehåller ett visst element så sammanfaller de.

Sats 5.1. **(Lagranges sats)** Storleken av en delgrupp delar storleken av gruppen.

4. Bevisa Lagranges sats.

5. Hitta de två delgrupperna till $\mathbb{Z}_{29}$.

6. Visa att alla grupper av primtals storlek är cykliska.

7. Visa att om storleken av två delgrupper är relativt prima så är deras snitt $\{e\}$.

Definition. **(Ordning).** *Ordningen* av ett element a är det minsta heltal n så att $a^n = e$.

8. Vad är ordningen av vardera element i "klä om strumpan"-gruppen?

9. Vilket element i permutationsgruppen S_5 har högst ordning?

10. Låt a vara ett element i gruppen av heltal modulo n under addition. Vilka möjliga ordningar kan a ha?

11. Visa att för ett element a så implicerar $a^n = e$ att ordningen av a delar talet k.

12. Visa att för ett element a i en grupp G med n stycken element så måste $a^n = e$.

Sats 5.2. **(Eulers sats).** För två positiva och relativt prima heltal a, n gäller att $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \mod n$ där $\varphi(n)$ är antalet tal mindre än eller lika med n som är relativt prima till n.

13. Visa att heltalen med en multiplikativ invers modulo n är exakt de element som är relativt prima med n.

14. Bevisa Eulers sats.

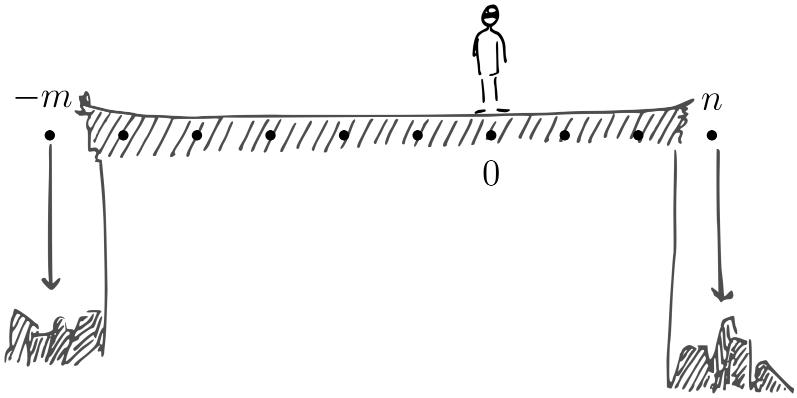
Extrauppgifter

Jobba på uppgifterna från tidigare blad. Det finns även ett blad om gruppverkan och Burnsides lemma om man önskar.

PHASE CHANGES AND CRITICAL PHENOMENA

ALEXEI LATYNTSEV

1. Random walks



1.1. **Blindfolded Björn.** A blindfolded man starts at the origin stepping randomly left or right, with cliff edges at n and $-m$. What is his life expectancy?

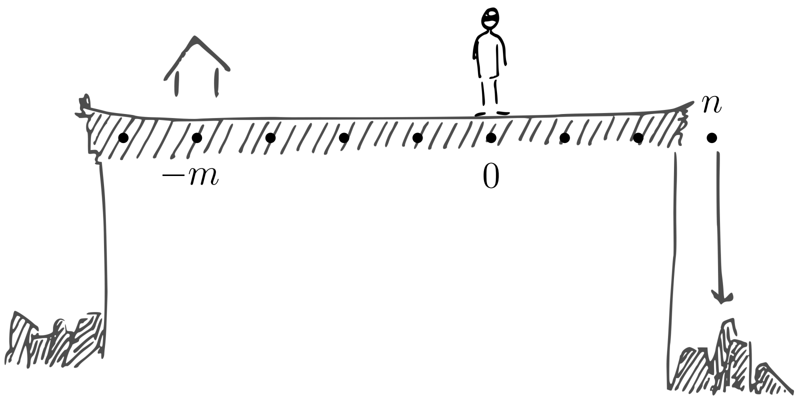
Answer: The life expectancy $\ell(x)$ starting at x satisfies

$$\ell(x) \ = \ \frac{1}{2}(\ell(x+1) + \ell(x-1)) + 1$$

and as $\ell(n) = \ell(-m) = 0$, this forces that

$$\ell(x) \ = \ (m+x)(n-x)$$

so his life expectancy is mn. Notice that as $n \to \infty$ this becomes infinite: this is the St Petersburg paradox.



1.1.1. In fact he now has a home at $-m$. What is the chance he gets home safe?

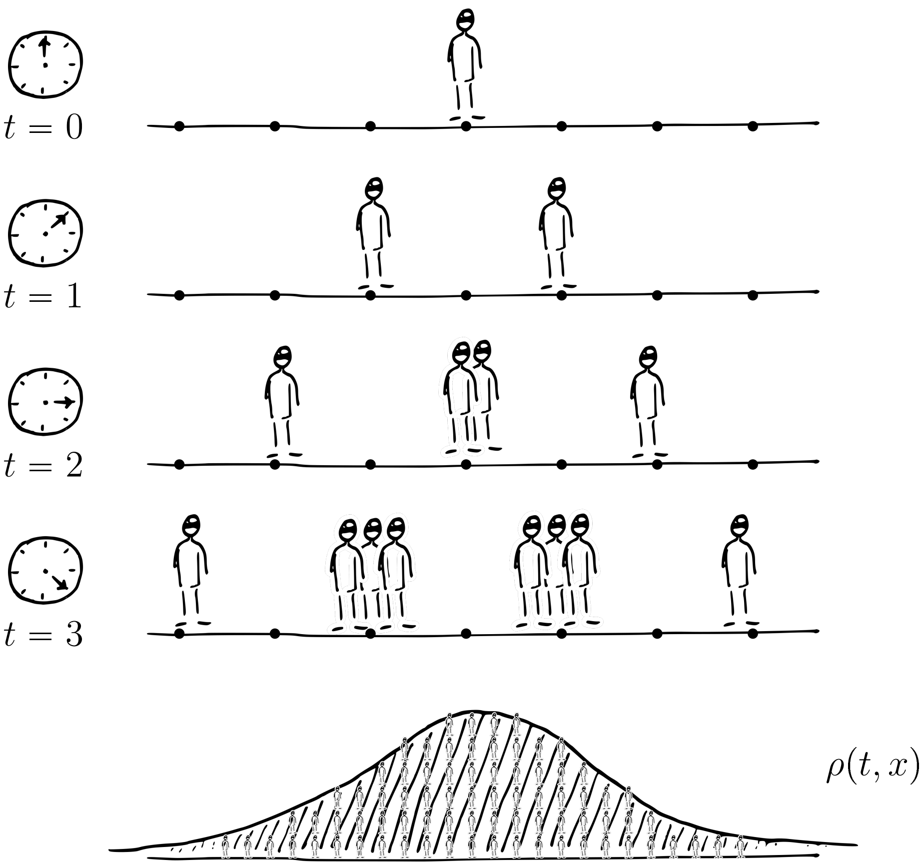
Answer: The probability satisfies

$$\rho(x) \ = \ \frac{1}{2}(\rho(x+1) + \rho(x-1))$$

and as $\rho(n) = 0$ and $\rho(-m) = 1$, this forces that

$$\rho(x) \;=\; \frac{1}{m}(n-x).$$

1.1.2. Remove the cliffs and houses for the rest of this class. At time t, call $\rho(t,x)$ the probability that Björn is at a point x.



Show that this satisfies the *heat equation*:

$$\partial_t\rho(t,x) \;=\; \frac{1}{2}\partial_x^2\rho(t,x-1)$$

where ∂_t acts on functions of t like $\partial_t f(t) = f(t+1) - f(t)$.

1.1.3. What is the answer to all the above questions if he steps right with probability p and left with probability $q = 1-p$?

1.2. **Recurrence.** If Björn begins at the origin in **Z**, what is the probability that at time $2t$ he is again at the origin?

1.2.1. Use Stirling's approximation $n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$, or more precisely

$$\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{1}{n}-\frac{1}{360n^3}} \;\geqslant\; n! \;\geqslant\; \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{1}{n}}$$

where $e = 2.71828...$ is *Euler's number*, to show that

$$2\frac{(4pq)^t}{\sqrt{\pi t}} \;\geqslant\; p_{2t} \;\geqslant\; \frac{(4pq)^t}{\sqrt{\pi t}}$$

for t large enough.

1.2.2. Show that

$$\sum_{t=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{t}} \;\to\; \infty \qquad\qquad \text{as } n \to \infty.$$

Ask me or William to explain the formal definition of this.

1.2.3. Conclude that when $p = q = 1/2$

$$\sum_{t\geqslant 0} p_t \;=\; \infty,$$

i.e. the expected number of times he returns to the origin is infinite. In this case, the random walk is called *recurrent*.

1.2.4. We now consider when the probabilities are not equal.

- Show that

  $$2(4pq)^{t/2} \;\geqslant\; 2\frac{(4pq)^t}{\sqrt{\pi t}}$$

  for t large enough.

- Show that $4pq$ achieves its maximum value when $p = 1/2$, and when $p \neq 1/2$, we have $4pq < 1$.

- Show that if $x < 1$, that $\sum_{n\geqslant 0} x^n = 1/(1-x) < \infty$.

- Conclude that when $p \neq 1/2$, the expected number of times he returns to the origin is finite,

  $$\sum_{t\geqslant 0} p_t \;<\; \infty.$$

  In this case, the random walk is *transient*.

1.3. **Recurrence, part two.** Now let Björn start at the origin in $\mathbf{Z}^2$, with equal probability of going in any direction. Show that

$$\sum_{t=1}^{n} \frac{1}{t} \;\to\; \infty \qquad\qquad \text{as } n \to \infty$$

and conclude that the expected number of times he returns to the origin is infinite.

1.3.1. Show that

$$\sum_{t=1}^{n} \frac{1}{t^2} \;<\; 1 + \sum_{t=2}^{n} \frac{1}{t(t-1)} \;=\; 2 - \frac{1}{t} \;<\; 2 \qquad \text{for all } n.$$

Conclude that the random walk on $\mathbf{Z}^4$ is transient.

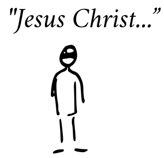
1.3.2. Make a conjecture on for what values of $s \in \mathbf{R}$ the sum

$$\sum_{t=1}^{n} \frac{1}{t^s}$$

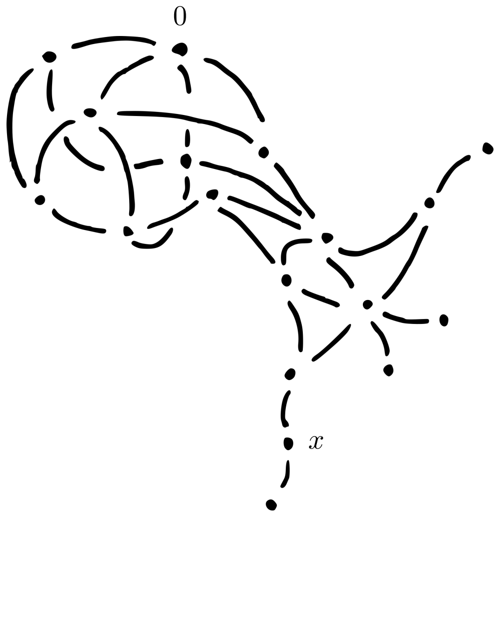
goes to infinity (*diverges*) or approaches some finite number finite (*converges*). What does this imply about the recurrence of the random walk on $\mathbf{Z}^d$, for any d?

Prove your conjectures for $s = 3/2$ and show this means the random walk on $\mathbf{Z}^3$ is transient.

1.4. **Björn's adventures.** Let's put Björn on an alien world.



We'll model this as a graph



Γ

and put Björn at 0.

1.4.1. Show that, if Björn is equally likely to step any direction, then if

$$\rho(t, x) \;=\; \frac{|\{0 \to x_1 \to \cdots \to x_t = x\}|}{|\{0 \to x_1 \to \cdots \to x_t\}|}$$

is the number of length t paths from 0 to x, divided by the total number of length t paths starting from 0. Show that it satisfies the *heat equation*:

$$\partial_t \rho(t,x) \;=\; \Delta\rho(t,x)$$

where $\Delta f(x) = \sum_{y\sim x} f(y)$ is the sum[1] over all y adjacent to x.

1.4.2. If Γ is finite, as $t \to \infty$ the probability approaches a *limit*

$$\rho(t,x) \;\to\; \rho(x).$$

Show that it satisfies $\Delta\rho(x) = 0$. Thus, what is $\rho(x)$?

Answer: The only solution to this is

$$\rho(x) \;=\; \frac{|\{\text{edges at } x\}|}{|\{\text{total number of edges}\}|}.$$

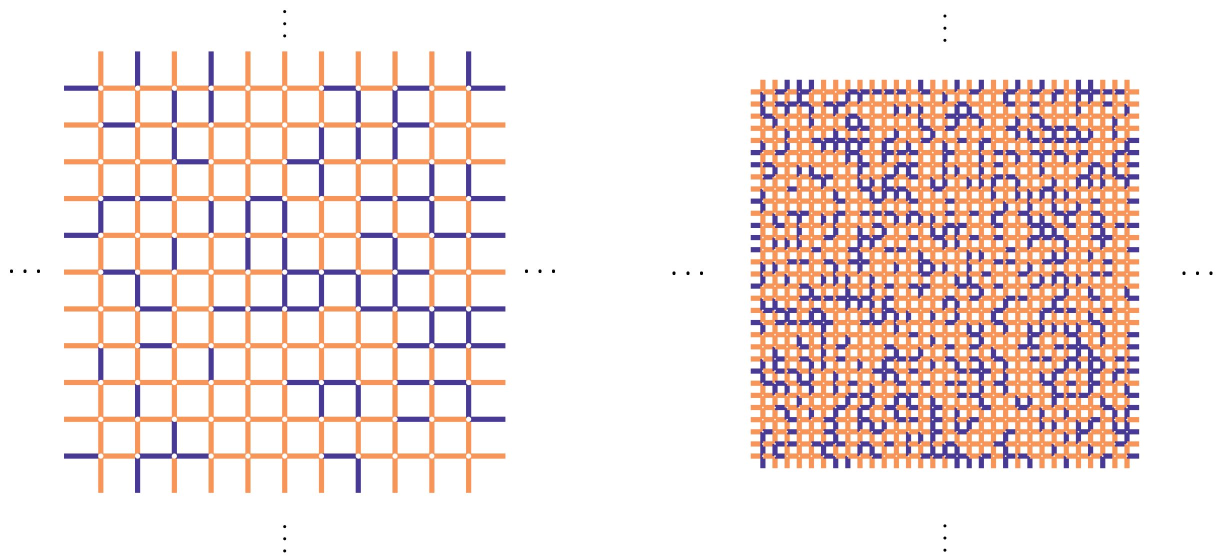
[1] This is called the *Laplacian*.

2. Percolation

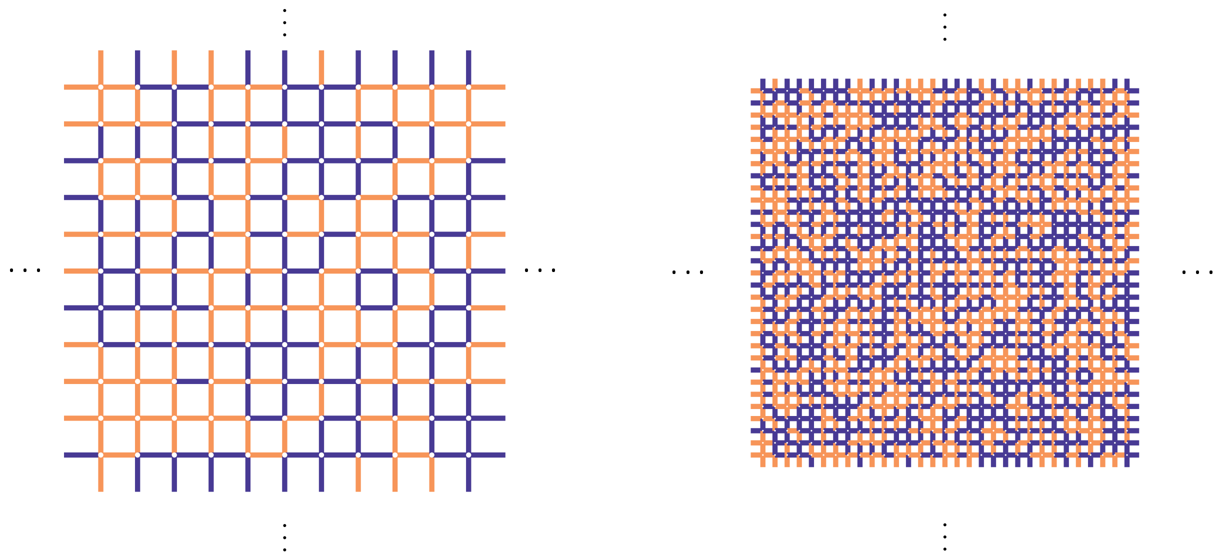
Today we will look at our first mathematical model of phase change behaviour. Our goal in this class and the next is to understand and prove the following Theorem:

Theorem. *The phase change probability p_c for the square graph is $p_c = 1/2$.*

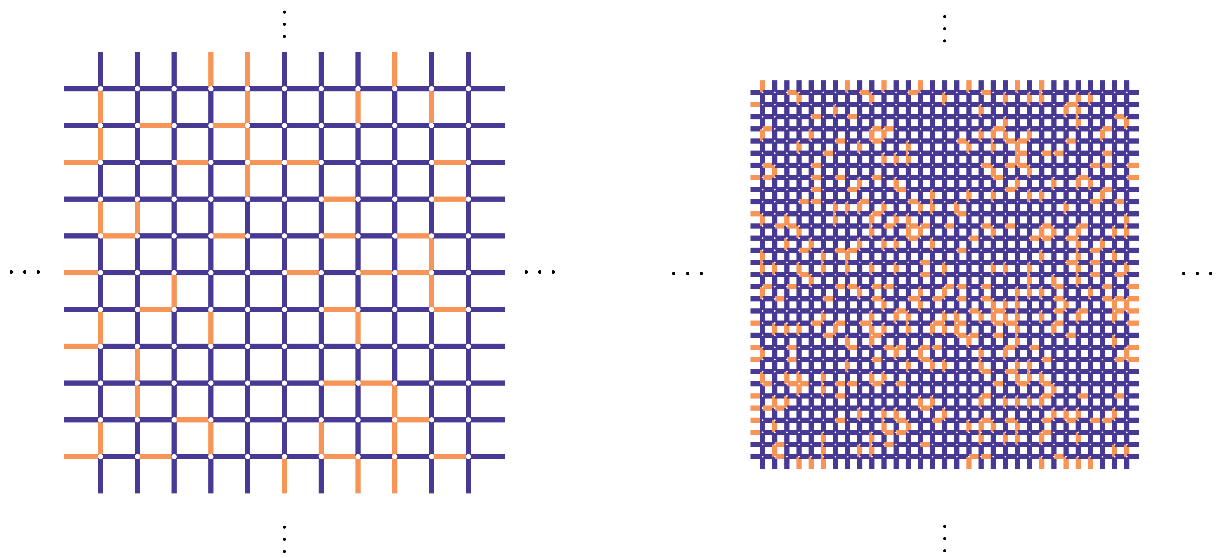
2.1. Colour in the edges of the square graph with two colours, using probability p and $1-p$ for each colour. Here is a graph for $p = 1/3$:



Here is a graph for $p = 1/2$:



Here is a graph for $p = 4/5$:



For each colouring, we consider whether the blue blob at 0 is infinite or finite.

2.1.1. Show that this is equivalent to there existing a blue path from 0 to infinity. For the colourings, is there a path from 0 to the edge of the picture?

2.1.2. Convince yourself that the boundary between the red and blue regions looks like a fractal when $p = 1/2$.

2.1.3. Let us write

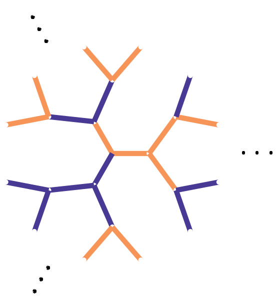
$$\theta(p)$$

for the probability that a random colouring (where blue edges are coloured with probability p) has an infinite blue blob at 0. Show that:

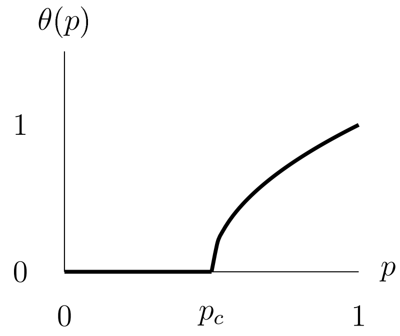
(A) $\theta(0) = 0$ and $\theta(1) = 1$.

(B) $\theta(p)$ is a non-decreasing function of p.

(C) Compute $\theta(p)$ when instead of the square graph we use



For a general graph, we write the *critical probability* p_c as the the smallest value such that $\theta(p) = 0$ for $p < p_c$. Thus if θ is nice it will look like



but it might not be continuous: it is not known whether $\theta(p_c) = 0$ in general. We just know that $\theta(p)$ is non-decreasing.

2.2. We will now show that there *is* a phase change for the square graph, i.e. a value of p where the qualitative behaviour of the system changes:

Theorem 2.2.1. *On the square graph, or more generally* $\mathbf{Z}^d$ *for* $d \geqslant 2$*, we have that* $0 < p_c < 1$.

Think of this as the "boiling point" or the "melting point" of the graph.

2.2.2. Let us first show that $p_c > 0$. To do this, we will consider *self-avoiding random walks* starting at 0 and just walking on blue edges, i.e. Björn walks randomly on the graph, but refuses to visit any vertex twice.

(A) Show that $\theta(p)$ is the probability that there is a blue infinite self-avoiding random walk starting at 0.

Hint: use problem 2.1.1.

(B) If σ_n is the number of self-avoiding walks starting at 0 of length n in $\mathbf{Z}^d$, of any colour, show that

$$\theta(p) \leqslant \mathbf{P}\left(\text{there is a blue self avoiding walk of length } n \text{ starting at } 0\right) \leqslant \sigma_n p^n.$$

(C) Prove that on $\mathbf{Z}^d$,

$$\sigma_n \leqslant (2d)(2d-1)^{n-1}.$$

Hint: show that the right hand side counts the number of walks in which Björn only refuses to visit the vertex he was *last* at (but he's OK revisiting vertices from before that).

Conclude that $p_c \geqslant 1/(2d-1)$.

2.2.3. Let us finish by showing that $p_c < 1$.

(A) Show that $1 - \theta(p)$ is the probability that the blue blob at 0 is finite.

(B) Show that if A and B are events,

$$\mathbf{P}(A \text{ and } B) \leqslant \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B).$$

(C) Let γ_n be the number of length n loops around 0 in the square grid $\mathbf{Z}^2$, in any colour. Show that

$$1 - \theta(p) \leqslant \sum_{n \geqslant 1} \mathbf{P}(\text{there is an orange loop of length } n \text{ around } 0) \leqslant \sum_{n \geqslant 1} \gamma_n (1-p)^n$$

(D) For any loop of length n around 0, show that we get a self-avoiding random walk of length $n-1$ starting from one of $(0,1), (0,2), ..., (0,n)$. Conclude that

$$\gamma_n \leqslant n\sigma_{n-1} \leqslant 4n3^{n-1}.$$

(E) Show that

$$1 - \theta(p) \leqslant \frac{4}{3} \sum_{n \geqslant 1} n(3(1-p))^n$$

and that this goes to 0 as $p \to 1$.

Conclude that $p_c < 1$.

2.3. **How does p_c relate to self-avoiding random walks?** Let us show a stronger version of the above result:

Corollary. *We have $1/\kappa \leqslant p_c \leqslant 1 - 1/\kappa$, where*

$$\log(\sigma_n)/n \to \kappa \qquad \text{as } n \to \infty.$$

κ is called the *connective constant* of the graph.

2.3.1. Show that for $\mathbf{Z}^d$ that $\sigma_{n+m} \leqslant \sigma_n \sigma_m$. For what other type of graphs is this true?

2.3.2. If you know what limits are, prove that $\log(\sigma_n)/n$ has a limit, which we denote by κ. Otherwise, just assume this and skip to the next question.

2.3.3. Finish the proof of the above corollary by adapting the proof of the original Theorem.

2.3.4. Show that $\kappa = 1$ for the graph $\mathbf{Z}$. It is conjectured but now known for $\mathbf{Z}^2$ that $\sigma_n = A\kappa^n n^{11/32} + \cdots$ where A is a constant.

2.3.5. Show for the hexagonal lattice that $\kappa = \sqrt{\sqrt{2} + 2}$.

2.4. **Extra problem: Random walks and boundary conditions and Laplace's equation.**

2.4.1. Let Γ be a graph and $\partial\Gamma$ a subset of the graph, which we call its *boundary*. Let $f(x)$ be a function on the boundary, $x \in \partial\Gamma$.

Show that a solution to

$$\Delta\rho(x) \;=\; 0 \text{ if } x \in \Gamma, \qquad\qquad \rho(x) \;=\; f(x) \text{ if } x \in \partial\Gamma$$

is given as follows. Start a random walk at x, and let y be the first point on the boundary it hits. Then we set

$$\rho(x) \;=\; \mathbf{E}(\rho(y)).$$

2.5. **Reading task: Schramm-Loewner evolution.** You proved last time that if Björn randomly walks on $\mathbf{Z}^2$, his probability $\rho(x,t)$ of being at any spot $x \in \mathbf{Z}^2$ at time t satisfies the heat equation

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(x,t) \;=\; \Delta\rho(x,t)$$

where Δ is the graph Laplacian.

2.5.1. What about if Björn *self-avoidingly* walks on $\mathbf{Z}^2$? What is the equation satisfied by $\rho(x,t)$ in this case?

This is unknown, but is expected to be the *SLE equation with parameter* $8/3$:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\partial_w^2 h \;=\; \frac{4w}{w^2+1}\partial_w h$$

where $z = x/y$ and creasing implies that for all large enough p, where

$$h(x,y) \;=\; \mathbf{P}\left(\text{the walk } \gamma \text{ passes } (x,y) \text{ to the left}\right).$$

Häftet sammanställer lektionsmaterial från samtliga 56 ordinarie mattelektioner på Mattekollo och Programmeringskollo 2024. Fyra nivåindelade grupper har fått 14 mattelektioner vardera utspridda över åtta dagar.

Material från programmeringslektionerna samt information om andra mattekollon och programmeringskollon hittar ni på http://www.mattekollo.se

Tack till alla ledare och deltagare!